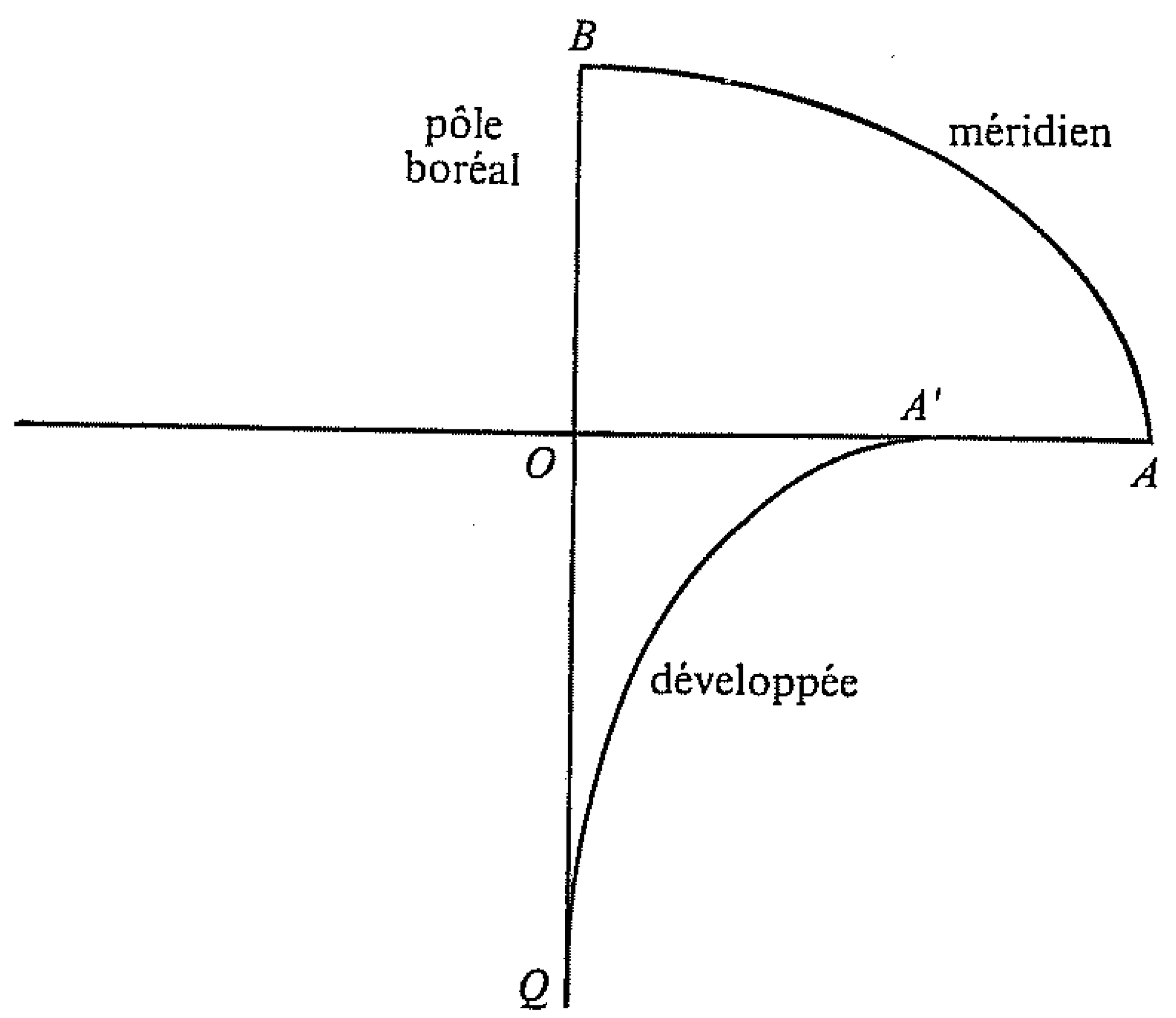

différence des longueurs $QB - A'A$ s'interprète comme la longueur de l'arc de développée QA'. Soit $QB - A'A =$ arc QA'. L'inégalité de convexité fournit aussitôt $OA - OB > 0$. Soit $OA > OB$. Prouvant ainsi, sans fioriture, que la Terre est aplatie au pôle.

Laplace reprendra textuellement cette démonstration dans l'*Exposition du système du monde* (livre I, chapitre 14). Pour bien enfoncer le clou, il ajoutera que sa démonstration ne présuppose nullement la symétrie des deux hémisphères, polaire et austral : « On prouvera de même que l'excès de ce demi-diamètre sur le rayon mené du centre de la terre au pôle austral est positif ; l'axe entier des pôles est donc moindre que le diamètre de l'équateur, ou, ce qui revient au même, la terre est aplatie dans le sens des pôles. » Laplace exagérait en prétendant qu'il était facile d'étendre ces démonstrations « au cas où la terre ne serait pas de révolution ».

En tout cas, de tels résultats déduits de la seule analyse à partir d'un minimum de mesures faisant appel à l'expérience sensible ne pouvaient que ravir Laplace. Celui-ci reviendra longuement sur les calculs de la figure de la Terre, en particulier au volume II de la *Mécanique céleste*. Il calculera alors le potentiel de gravitation superficielle et en déduira par dérivation la direction et la valeur de la pesanteur. Sur la foi de quelques mesures de longueur du pendule, il déduira alors l'aplatissement $\alpha = \frac{1}{335{,}8}$ et trouvera un bon accord avec les calculs déduits cette fois de la géodésie, à partir de ceux de Delambre et Méchain qui servirent pour la définition du mètre. Il n'était plus besoin de s'embarrasser de précautions oratoires pour présenter l'aventure savante. Dès l'*Exposition du système du monde*, Laplace avançait triomphalement ce qui restait pour lui la leçon la plus notable de la détermination de la figure de la Terre : « Il est très remarquable qu'un Astronome, sans sortir de son observatoire, en comparant seulement ses observations à l'analyse, eût pu déterminer exactement la grandeur et l'aplatissement de la terre, et sa distance au soleil et à la lune, éléments dont la connaissance a été le fruit de longs et pénibles voyages dans les deux hémisphères. L'accord des résultats obtenus par ces deux méthodes est une preuve des plus frappantes de la gravitation universelle » (Livre IV, chap. 5).

J.D.

ANNEXE 14

Sur la distance de deux droites

La détermination de la distance de deux droites, et de leur perpendiculaire commune [1], constitue certainement le problème le plus intéressant de géométrie descriptive élémentaire.

La solution que Monge expose dans les leçons de l'École normale est, *a priori*, surprenante. Alors que le problème peut se résoudre aisément par la considération de droites et de plans (donc en restant dans le premier degré), Monge ramène la question à la détermination d'un cylindre de révolution d'axe donné et tangent à un plan donné (parallèle à cet axe). De ce fait, ce problème est traité après ceux concernant la construction des plans tangents à une surface de révolution et apparaît en quelque sorte comme une réciproque de cette dernière question. Monge précise à la fin de sa démonstration que la « considération d'une surface cylindrique touchée par un plan n'était point nécessaire pour la solution de la question » (cf. p. 347) suggérant à son auditoire une construction plus classique qui consiste à considérer les deux plans passant chacun par l'une des deux droites données et perpendiculaire à la direction de plan définie par ces deux droites.

La première épure de géométrie descriptive

Le problème apparaît une première fois dans un mémoire de Tinseau, *Sur quelques propriétés des solides renfermés par des surfaces composées de lignes droites* [Tinseau 1780]. Élève de Monge à l'École du génie de Mézières de 1769 à 1771, Tinseau rend hommage, dans l'introduction de son mémoire, à son ancien professeur qui a fortement influencé ses travaux. Le problème qui nous intéresse ici est traité en incidence [2] mais la solution, s'appuyant sur une épure, peut être considérée comme le premier raisonnement de géométrie descriptive qui nous soit parvenu. Tinseau précise qu'il va donner la construction de ce problème par une méthode usitée dans la coupe de pierres et qui, par son utilité, mériterait d'être plus connue. L'idée même d'utiliser les méthodes usitées dans la coupe de pierres pour résoudre un problème de géométrie dans l'espace vient sûrement des cours de Monge [3].

Le texte explicatif pâtit à la fois d'une absence d'un énoncé clair des principes de base de la géométrie descriptive et de notations très maladroites. Mais la méthode elle-même n'est pas sans élégance et l'épure est d'une grande clarté.

Tinseau considère les deux plans parallèles entre eux passant par les deux droites $(Ac, \mu\lambda)$ et $(ac, \mu K)$, détermine leurs traces horizontales (Ae et am) et effectue un

1. Nous désignons par « perpendiculaire commune de deux droites » la droite sécante avec chacune des droites données et qui possède la propriété énoncée.
2. La démonstration est donnée au paragraphe 18 du mémoire, p. 635-638.
3. Sur l'influence de Monge dans les travaux de Tinseau, voir [Taton, 1951, p. 76-77].

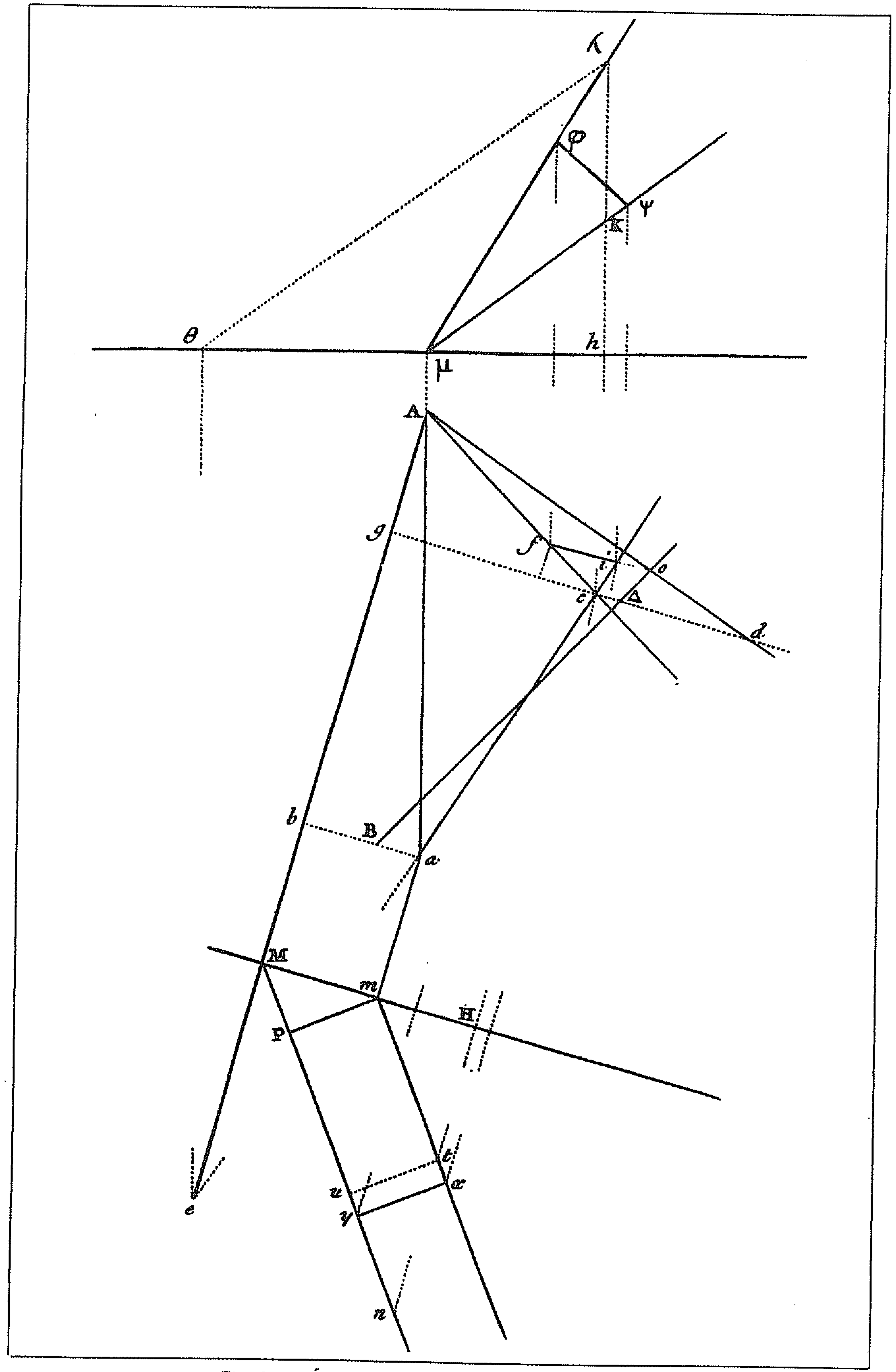

Fig. 1. — Épure de Tinseau [Tinseau, 1780, p. 642].

changement de plan pour rendre ces deux plans debout. Il projette sur le plan de trace *Ae* la 2e droite (ac, μK), puis rabat ce plan sur le plan horizontal. Il en déduit aisément la perpendiculaire commune et la vraie grandeur de la distance des deux droites.

La première démonstration de Monge

La question est également évoquée dans une correspondance entre Lacroix et Monge durant l'année 1789. « Un [des problèmes] qui m'a fait le plus plaisir est celui de trouver la plus courte distance de deux lignes ; ce que je fais avec la règle et le compas sans y employer aucune considération analytique », écrit Lacroix [1] à son ancien professeur de l'École du Louvre. En réponse à une question posée dans cette lettre, Monge [2] donne une solution analytique du problème, assez rapide, qui se ramène à la résolution d'un système de quatre équations à quatre inconnues. Mais la correspondance de Lacroix conservée à la Bibliothèque de l'Institut contient également une note manuscrite de Monge, sans date (mais très probablement de 1789), où est donnée une construction géométrique de la distance de deux droites [3].

La méthode exposée dans cette note est identique, dans sa première partie, à celle qu'avait suivie Tinseau. Mais, dans la deuxième partie, Monge évite le rabattement de plan que celui-ci effectue en déduisant la droite cherchée de la connaissance de la direction de la perpendiculaire commune et de la vraie grandeur de la distance des deux droites. Le problème se ramène alors à déterminer deux points appartenant à deux droites données, de distance donnée et définissant une droite de direction donnée. Le texte de cette note étant le premier exemple connu de résolution d'un problème de géométrie descriptive rédigée par Monge, nous le citons intégralement [4] :

« *Plus courte distance de deux droites données de position*

« Étant données les projections horizontales *ab*, *cd* des deux droites et leurs projections verticales *AB*, *CD*, construire les projections horizontales et verticales de la droite qui est en même temps perpendiculaire à l'une et à l'autre.

« Construction

« Je conçois deux plans parallèles entre eux et mené l'un par une des droites données et l'autre par l'autre ; il est bien évident que la distance entre ces deux plans est égale à la distance perpendiculaire entre les deux droites ; et je cherche les intersections de ces deux plans avec le plan horizontal. Pour cela, par le point *E* d'intersection des deux projections verticales j'abaisse la verticale *EE'* et je la prolonge dans le plan horizontal jusqu'à ce qu'elle coupe les deux projections horizontales en deux points *e*, *e'* ; par les pieds *A*, *C* des deux projections verticales, je mène à *AC* les deux perpendiculaires indéfinies *Aa*, *Cc* ; puis par le point *e* je mène *eF* parallèle à *cd* et je la prolonge jusqu'à ce qu'elle coupe *Cc* en un point *F*, et de même par le point *e'* je mène *e' G* parallèle à *ab* et je la prolonge jusqu'à ce qu'elle coupe *Aa* en un point *G* ; enfin je mène les deux droites *aF*, *Gc* qui seront parallèles entre elles, et qui seront les intersections du plan horizontal avec les deux plans demandés. En effet, si par le point de la première droite représenté en *E* et *e* on conçoit une droite parallèle à la seconde, le plan mené par cette droite et par la première sera un des plans demandés ; or cette droite parallèle rencontre évidemment le plan horizontal en *F* ; donc la droite *aF* sera l'intersection du premier plan demandé avec le plan horizontal. On démontre de même que *Gc* sera l'intersection du plan horizontal avec le second plan demandé.

« Cela fait, je mène une droite *HJ* perpendiculaire à *aF* ou *Gc*, et par cette droite je conçois un plan vertical qui sera perpendiculaire aux deux plans parallèles et sur lequel je fais la projection de ces deux plans qui y seront représentés par deux droites parallèles entre elles. Pour cela, je prolonge les deux droites *aF*, *Gc* jusqu'à ce qu'elles coupent *HJ* en deux points *K*, *L*, qui seront les projections des intersections du plan horizontal avec les deux plans parallèles ; par le point *e*, je mène sur *HJ* la perpendiculaire indéfinie *eN*, et je porte sur cette droite de *n* en *N* la hauteur verticale *E' E*, ce qui détermine le point *N*, et la droite *KN* sera la projection du premier plan demandé et, si l'on mène la parallèle *LS*, on aura la projection du second de ces

1. Lettre de Lacroix à Monge de 1789. Minute. Bibliothèque de l'Institut, papiers de Lacroix, Ms 2397.
2. Lettre de Monge à Lacroix, Bibliothèque de l'Institut, papiers de Lacroix, Ms 2396.
3. Bibliothèque de l'Institut, papiers de Lacroix, Ms 2396.
4. Pour faciliter la lecture, nous avons tracé l'épure.

plans. Il suit de là que, si du point L on abaisse sur KN la perpendiculaire LM, cette perpendiculaire sera la distance des deux plans et par conséquent la plus courte distance entre les droites données.

« Actuellement, du point c soit abaissée sur aF la perpendiculaire cO, et par le point M soit menée parallèlement à aF la droite MP qui coupera cO quelque part en P, et HJ quelque part en m ; il est clair que Lm sera la grandeur de la projection horizontale de la distance perpendiculaire des deux droites ; on sait de plus que la projection horizontale de la droite demandée perpendiculaire aux deux lignes données doit être perpendiculaire aux droites aF, Gc ; la question est donc réduite (pour la projection horizontale) à trouver sur ab un point Q et sur cd un point R tels qu'ils soient dans une perpendiculaire à aF, et que leur distance soit égale à Lm ; or je remplis ces deux conditions en menant par le point P une parallèle à cd qui coupera aF au point Q, et en menant par le point Q une perpendiculaire à aF qui coupera cd au point R ; car on aura $QR = PC = Lm$. Donc la droite QR ainsi construite sera la projection horizontale de la perpendiculaire demandée. Enfin, si l'on projette le point Q en q, et le point R en r, la droite qr sera la projection verticale de la droite demandée.

« Cette construction peut être simplifiée par la suppression de quatre lignes : 1° la droite LS est inutile, et je ne l'ai menée que pour éclaircir le procédé ; 2° la droite HJ peut être menée par le point c, ce qui fait que CO coïnciderait avec LK ; 3° on peut supprimer la droite Gc dont la considération a été utile pour la clarté et qui n'est pas nécessaire ; 4° enfin, Ge' qui n'a été menée que pour construire Gc est pareillement inutile. »

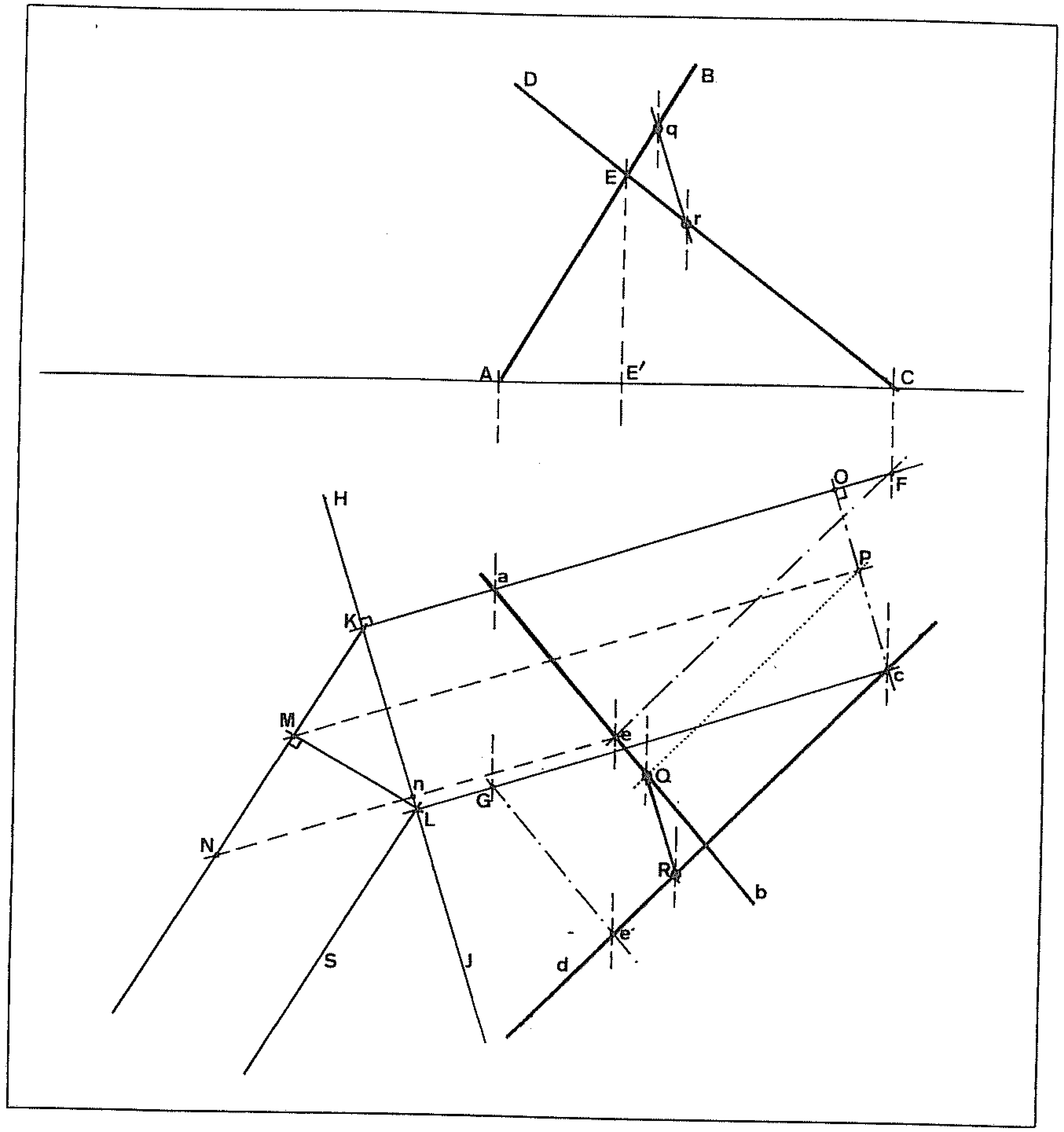

Fig. 2. — Épure : solution proposée par Monge dans une lettre à Lacroix.

Les solutions exposées par Monge dans ses cours

Dans ses leçons à l'École normale, Monge ne reprend pas la méthode précédente. Il détermine d'abord les traces horizontales et frontales du plan contenant la première droite donnée (AB, ab) et parallèle à la seconde (CD, cd), puis construit la génératrice de contact du cylindre tangent à ce plan dont l'axe est la droite (CD, cd) (cf. *fig.* 15, p. 344).

Pour ce faire, il détermine la projection (J, i) d'un point quelconque (sur l'épure le point (C, c)) de cet axe sur le plan dont il a trouvé les traces. La génératrice de contact est naturellement la droite parallèle à l'axe passant par le point (J, i). Elle coupe la droite (AB, ab) en un point qui appartient à la perpendiculaire commune qui est ainsi complètement déterminée (PN, pn), puisque sa direction est déjà connue. La vraie grandeur de la distance des deux droites, qui n'est pas tracée sur l'épure, se ramène alors à la vraie grandeur du segment $[PN, pn]$.

Le cylindre ne joue, dans le tracé même de l'épure, aucun rôle. Il suffit de remplacer génératrice de contact par la droite du plan considéré parallèle à la deuxième droite (CD, cd) pour que toute référence au cylindre disparaisse et que l'on retrouve une solution ne faisant intervenir que droites et plans.

C'est ainsi que procédera Monge dans son cours à l'École centrale des travaux publics, où il aborde le problème une première fois le 12 germinal [1]. La question est d'ailleurs traitée dans le chapitre des *Préliminaires* avant toute référence aux surfaces courbes. Une dizaine de jours plus tard, traitant des plans tangents aux surfaces, Monge revient sur le problème et donne une deuxième solution, utilisant cette fois le cylindre annexe. Cette solution est légèrement différente de celle qu'il avait présentée deux mois plus tôt à l'École normale. Hachette (sans doute avec l'accord de Monge) conservera cette mouture dans l'édition de 1811 de la *Géométrie descriptive* [2] et elle sera toujours reprise dans les éditions ultérieures. Le cylindre intervient directement dans le tracé de l'épure.

Après avoir construit les traces du plan contenant la première droite (AB, ab) et parallèle à la seconde (CD, cd) (cf. *fig.* 3), Monge détermine le rabattement sur le plan horizontal d'une section droite du cylindre d'axe (CD, cd) et tangent au plan considéré. Cette section droite porte le cercle directeur et donc la vraie grandeur de la distance des deux droites.

De plus, l'intersection de ce plan, perpendiculaire à l'axe du cylindre, avec le plan tangent au cylindre est une tangente au cercle directeur. En prenant comme nouveau plan frontal le plan vertical contenant l'axe du cylindre, on détermine le rayon du cercle cherché et le rabattement du point de contact I du cercle et de sa tangente. La construction s'achève comme dans l'épure donnée à l'École normale, le point I permettant de tracer la projection horizontale de la génératrice de contact et d'en déduire la perpendiculaire commune.

Si le raisonnement est légèrement plus compliqué que celui tenu à l'École normale, on obtient simultanément la distance des deux droites et la perpendiculaire commune. De plus, les propriétés du cylindre et de son plan tangent interviennent directement dans le tracé de l'épure. Ce sont ces raisons qui poussèrent sans doute Hachette (à tort, à notre avis) à conserver cette dernière solution dans les rééditions ultérieures de la *Géométrie descriptive*.

Notons également que la construction donnée dans la dernière partie de l'épure est identique dans la note manuscrite de 1789 et dans la deuxième solution présentée à l'École centrale des travaux publics. Connaissant la vraie grandeur de la distance de deux droites, la projection de cette distance sur le plan horizontal, et la direction de la perpendiculaire commune, on en déduit les points des deux droites qui portent la plus courte distance. Mais ce qui apparaît comme une astuce d'habile géomètre dans la note, s'explique aisément dans le cours à l'École centrale des travaux publics, grâce à la considération du cylindre.

1. Cf. *Cours de géométrie descriptive de l'École centrale des travaux publics*, rédigé par Lomet, Bibliothèque de l'École nationale des ponts et chaussées, Ms, fol. 150.
2. Cf. l'introduction aux leçons de Monge.

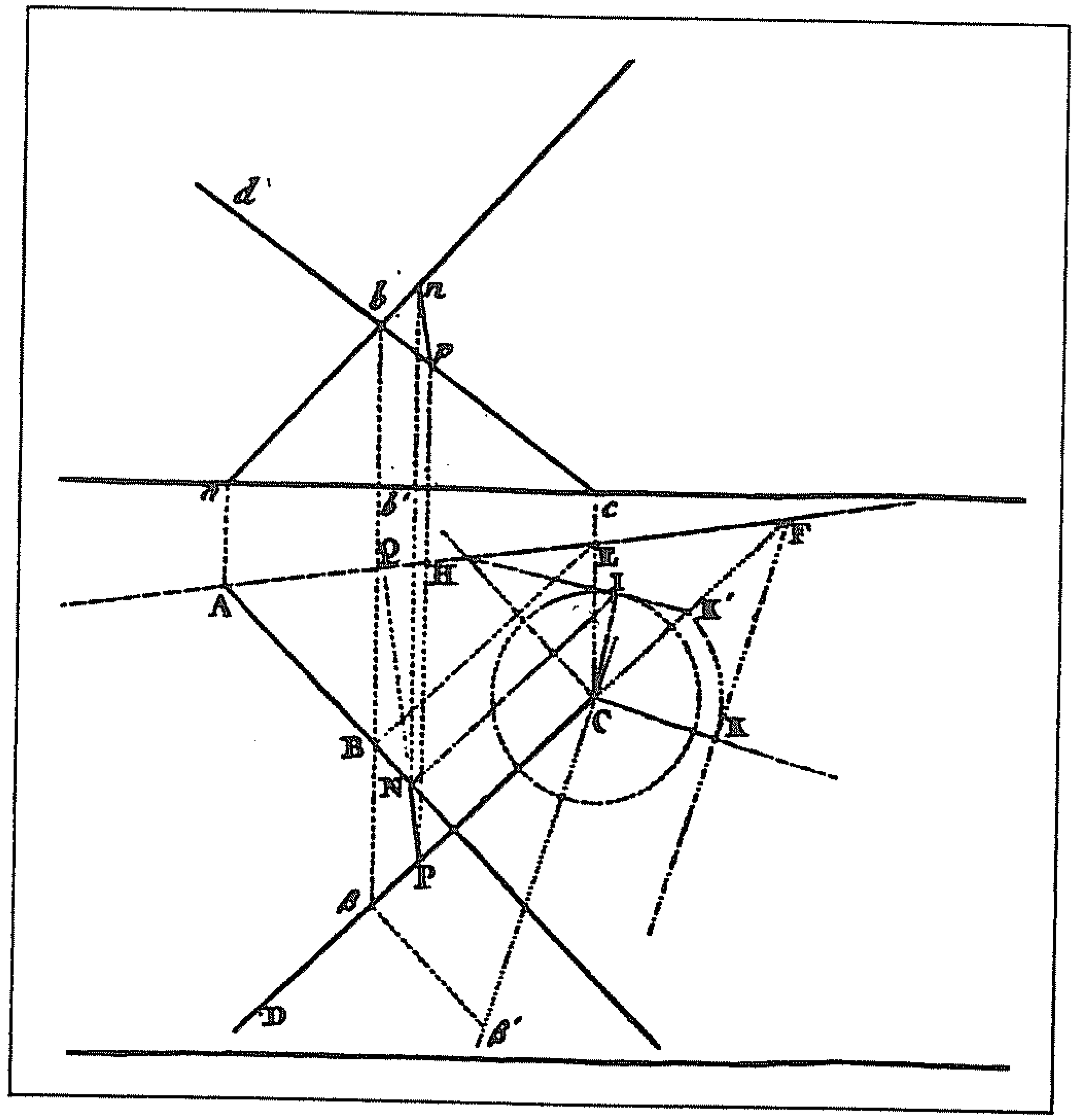

Fig. 3. — Épure de Monge, deuxième solution donnée à l'École centrale des travaux publics.

Quant à la solution analytique du problème, donnée par Monge dans les *Feuilles d'Analyse appliquée à la géométrie* [Monge, 1800, n° 3 et 3 bis], elle présente également un intérêt certain. Monge a introduit précédemment les coordonnées dites de Plücker des droites. Il les utilise d'abord pour déterminer la distance de deux droites comme différence des distances de l'origine aux deux plans parallèles menés par ces deux droites, puis pour trouver la perpendiculaire commune. L'utilisation des coordonnées plückeriennes des droites (six coordonnées homogènes satisfaisant une relation donnée) permet en effet d'écrire très simplement les conditions d'orthogonalité et d'intersection de la droite cherchée avec les deux droites données. Il reste un calcul d'élimination que Monge résout très élégamment [1].

Les solutions de Lacroix

Dans ses traités, Lacroix reprend naturellement ce problème qui lui avait donné tant de plaisir quelques années auparavant.

Dans son manuel de géométrie descriptive [Lacroix, 1795, p. 43-46], il donne une solution identique à la première présentée par Monge à l'École centrale des travaux publics, mais en propose également une autre, en un sens plus moderne. Il considère

1. Pour une étude détaillée des *Feuilles d'Analyse appliquée à la géométrie*, et en particulier leur influence sur Plücker, voir [Taton, 1951, p. 120-123].

d'abord le cas particulier où l'une des droites est verticale, ce qui rend le problème trivial, puis ramène ensuite le cas général à ce cas particulier par une méthode de changement de plan. Mais, alors qu'aujourd'hui on décompose le changement de référent en deux étapes, une première pour rendre la droite frontale et une seconde pour la rendre verticale, Lacroix effectue ce changement directement, utilisant simplement la construction, donnée préalablement, de la projection d'un point sur un plan quelconque. Ce choix complique sensiblement l'épure, que Lacroix ne trace d'ailleurs pas, se contentant d'exposer la méthode.

Néanmoins, cette solution met en évidence l'intérêt des changements de plan comme méthode de résolution d'un problème de géométrie descriptive, méthode qui n'était sans doute pas pleinement perçue par Monge et qui sera l'un des apports des cours d'Olivier [1].

La solution analytique de Lacroix est tout à fait différente de celle présentée par Monge. La distance de deux points appartenant à deux droites données est une fonction de deux variables dont la valeur minimale est la distance des deux droites. Cette question fournit ainsi à Lacroix une excellente application du calcul différentiel à un problème de géométrie [Lacroix, 1797, p. 446-447].

*
* *

Petit problème où la géométrie descriptive fait merveille, la détermination de la distance de deux droites et de leur perpendiculaire commune présente l'avantage, d'un point de vue pédagogique, d'être une question assez simple pour être facilement compréhensible et suffisamment riche pour offrir de multiples solutions. De plus, ces solutions utilisent les principaux procédés de la géométrie descriptive. Traces d'un plan, droite perpendiculaire à un plan, rabattement, changement de plan frontal, vraie grandeur d'un segment,..., ce problème est un véritable exercice de revision [2].

Pourtant Monge ne s'en tient pas là. Présentant un argument original, il n'hésite pas à introduire une surface annexe plus complexe que les éléments mêmes intervenant dans le problème considéré. Comme dans sa longue introduction sur les différentes façons de représenter un point de l'espace, il opère des détours surprenants, toujours avec le but de « familiariser [son auditoire] avec les propriétés de l'étendue [3] ». Si l'on essaie d'habitude de ramener les problèmes concernant les surfaces à des problèmes de droites et de plans, Monge montre que le chemin inverse est également praticable. Cet exemple n'a pas la richesse de ceux donnés immédiatement après, où la géométrie à trois dimensions est utilisée pour des théorèmes de géométrie plane, mais il relève d'un même esprit.

Devant la pluralité des solutions qui s'offrent devant lui, Monge choisit la plus visuelle. Le cylindre meuble l'espace. Il donne une matière à l'orateur, un support à l'intuition de l'auditeur et une consistance à une démonstration qui, sans lui, eût manqué de relief. Mais point n'est besoin pour autant de le figurer. Le cylindre, présent dans la démonstration, semble totalement absent de l'épure ; de la surface n'a été retenu que le seul élément jouant effectivement un rôle, à savoir la droite de contact. Par comparaison, les solutions données à l'École centrale des travaux publics paraissent fades ; la première s'inscrit clairement dans le chapitre des droites et plans, la seconde utilise le cylindre de façon plus voyante. Mais la solution développée à l'École normale, qui contient entièrement les deux précédentes, fournit une magnifique démonstration de géométrie descriptive.

J.S.

1. Voir l'annexe 21 : La géométrie descriptive après Monge.
2. Monge en fait explicitement la remarque lors de son cours du 22 germinal à l'École centrale des travaux publics (cf. cours de Lomet). De même, Lacroix avant de présenter sa démonstration, écrit que « cette solution est remarquable en ce qu'elle emploie presque tous les procédés que nous avons développés dans la solution des questions qui nous ont occupé jusqu'à ce moment » [Lacroix, 1795, p. 45].
3. 2e débat, p. 322.

ANNEXE 15

La coupe des pierres et la géométrie descriptive

Les origines de la géométrie descriptive sont anciennes et plurielles. L'utilisation de la double projection, avec une correspondance clairement établie entre les deux vues, comme moyen de représenter les objets de l'espace, apparaît à la Renaissance, dans les traités d'architecture et de perspective. Les exemples les plus clairs et les plus marquants de cette utilisation se trouvent dans le traité de perspective de Piero della Francesca [1472] et dans ceux de Dürer [1525] et [1528]. Dürer représente un cône, dont il détermine les sections planes, une hélice, ou même un visage humain. Il utilise, comme le fera Monge deux siècles et demi plus tard, cette méthode pour déterminer la perspective d'un cube. Citons également, comme domaines qui contribuèrent à la création de la géométrie descriptive [1], la gnomonique ou technique de construction des cadrans solaires, la théorie des éclipses, et le problème du défilement qui joua un rôle spécifique (cf. annexe 16).

Mais, parmi toutes les techniques anciennes que la géométrie descriptive théorise, la coupe des pierres occupe une place particulière. La richesse et la complexité des surfaces mises en œuvre ne se retrouvent pas ailleurs et supposent, de la part des appareilleurs, une parfaite maîtrise d'un mode de représentation de l'espace. Les traités publiés à partir de la fin du XVI^e siècle, à l'usage de cette corporation ou pour les architectes, apparaissent ainsi comme une source directe de la géométrie descriptive.

Monge travailla lui-même pendant deux ans dans l'atelier des dessins et de taille de pierres de l'École du génie de Mézières ; il en connaissait donc les problèmes et les méthodes. Le rôle de l'appareilleur est de tracer les épures qui permettent au tailleur de pierres de dresser chaque surface limitant les voussoirs. Ceux-ci, une fois assemblés pour constituer l'ouvrage de maçonnerie désiré, doivent comporter des joints aussi fins et réguliers que possible. Il existe traditionnellement deux méthodes pour déterminer les voussoirs, l'une dite par équarissement, l'autre par panneau.

La première consiste à inscrire le voussoir, qui reste dans la position qu'il occupera après l'assemblage, dans un parallélépipède rectangle dont les parois sont horizontales ou verticales. Chaque sommet, ou n'importe quel point particulier, est ensuite repéré par sa projection sur deux faces orthogonales de l'enveloppe. Cette méthode consiste donc bien, dans son principe, à repérer un point par sa double projection.

La méthode par panneau consiste, au contraire, à déterminer des patrons (en papier, en bois, en métal) qui sont les vraies grandeurs de chacune des faces des voussoirs. Elle nécessite un tracé géométrique préalable plus complexe, mais permet d'inscrire le voussoir à tailler dans un parallélépipède rectangle minimal. Plus économique en pierre et en temps pour la taille, cette seconde méthode s'impose peu à peu au moment de l'apparition des premiers traités de stéréotomie.

Les premiers ouvrages de stéréotomie qui nécessitent le trait, c'est-à-dire ceux pour lesquels la représentation en plan-coupe-élévation est insuffisante pour déterminer leurs éléments constitutifs, apparaissent au Proche-Orient dès le V^e ou VI^e siècle de notre ère,

1. Sur les origines de la géométrie descriptive, cf. [Taton, 1954], [Loria, 1921].

puis en Europe durant le Moyen Age. La « vis de Saint-Gilles [1] », premier exemple connu de voûte en berceau hélicoïdal, et archétype d'un des modèles les plus complexes de stéréotomie, date sans doute de la fin du XII^e siècle [2].

Mais, pendant tout le Moyen Age, le savoir des tailleurs de pierres est gardé secret par la corporation dont les statuts, publiés à Ratisbonne en 1459, précisent encore : « nul ouvrier, nul maître, nul parlier, nul journalier, n'enseignera à quiconque n'est pas de notre métier et n'a jamais fait travail de maçon comment tirer l'élévation du plan [3] ».

Les traités de taille de pierres

Aussi faut-il attendre 1567, et Philibert Delorme, pour que, « événement de première grandeur, le savoir de l'appareilleur rencontre la plus importante innovation technique de la Renaissance, l'imprimerie [4] ». Mais ce premier traité de stéréotomie est conçu comme un catalogue de cas auquel le praticien peut se référer. Les démonstrations données dans les textes d'accompagnement restent confuses et comportent même de nombreuses erreurs. Les planches de dessins, très schématiques, ne sont sans doute pas éloignées des croquis sommaires que l'on mettait par écrit, avant lui, pour faciliter la transmission orale de la tradition.

Le traité de Philibert Delorme reste le seul ouvrage imprimé de stéréotomie jusqu'à la publication, en 1640, par le mathématicien et architecte Girard Desargues (1591, 1661), d'un opuscule de huit pages (quatre de texte et quatre de dessin). Avec un net souci de géométrisation, Desargues étudie dans ces quelques feuillets un unique objet architectural, qui regroupe un certain nombre de difficultés stéréotomiques. Mais en choisissant un repère qui est intrinsèquement lié à l'objet étudié, donc indépendant de la pesanteur, Desargues s'interdit toute possibilité de généralisation et rend ses constructions géométriques, pourtant très habiles, beaucoup plus difficiles à suivre. D'esprit novateur et de lecture ardue, utilisant un vocabulaire inhabituel, le texte de Desargues n'est pas compris des professionnels auxquels il s'adresse.

A partir de Desargues, se développe une double tradition, celle des praticiens et celle des théoriciens.

Du côté des praticiens, on trouve par exemple le traité de Mathurin Jousse (1607-1650), *Le Secret d'architecture découvrant fidèlement les traits géométriques*, publié en 1642. Conçu pour aider les tailleurs de pierres, c'est un recueil de planches portant en vis-à-vis des explications plus techniques que géométriques. Il constitue le premier traité complet sur le sujet. L'année suivante, François Derand (1588-1644), architecte, mathématicien et pédagogue, publie son *Architecture des voûtes ou l'art des traits et coupe de voûtes*. Par une utilisation habile de la projection orthogonale, des rabattements et développements, qui lui permettent de déterminer en vraie grandeur des intersections de surfaces, il présente un ouvrage beaucoup plus lisible et des épures plus faciles à comprendre. Mais son traité, qui connut un grand succès, continue de délivrer un ensemble de recettes. Bosse, la même année, dans *La pratique du trait à preuves de Monsieur Desargues* ... ne fait que reprendre la méthode de Desargues ; en multipliant les exemples sur de nombreux cas particuliers, il en atténue le caractère général et théorique qui en faisait pourtant tout l'intérêt. Le *Traité de coupe de pierres* ... de Jean-Baptiste de La Rue, publié en 1728, reste très proche de celui de Derand, dont il s'inspire directement. Il présente néanmoins des planches d'une plus grande clarté, très bien gravées et illustrées de représentations axonométriques. Monge l'utilisa d'ailleurs dans ses cours de stéréotomie à l'École du Génie de Mézières et

1. En référence à un escalier de ce type situé dans l'abbaye Saint-Gilles du Gard.
2. Sur ce sujet, voir [Pérouse de Montclos, 1982].
3. Une traduction française des statuts de Ratisbonne a été publiée dans *Artisans et Ouvriers d'Alsace*, Strasbourg, 1965, p. 97-119.
4. [Pérouse de Montclos, 1982, p. 93]. Les petits fascicules de [Roriczer, 1486] ou de [Schmuttermayer, 1489], qui sont en fait les premières entorses au statut de Ratisbonne, ne traitent que d'un sujet très spécifique et ne sont en rien comparables au traité de Philibert Delorme.

dans les cours d'applications de la géométrie descriptive à l'École centrale des travaux publics[1].

Du côté des théoriciens, citons François Blondel (1618-1686) et Philippe de La Hire (1640-1718) qui enseignent la stéréotomie à l'Académie d'architecture mais ne publient pas de traité. L'ingénieur militaire Amédée-François Frézier (1682-1773), servi par de solides connaissances techniques et théoriques, présente, dans son important *Traité de stéréotomie à l'usage des architectes*, un ouvrage d'un esprit radicalement différent. Insistant sur l'importance de la théorie, il consacre le premier des trois tomes de son traité à l'étude des surfaces (essentiellement le cône, le cylindre et la sphère) et de leurs intersections par un plan ou entre elles. Fort de cette armature théorique, il propose plusieurs solutions originales de tracé qui montrent une plus grande maîtrise des problèmes à la fois statiques et géométriques, intervenant dans les ouvrages clavés. Les explications démonstratives qui suivent le texte d'accompagnement de chaque épure prouvent également le souci de l'auteur de dépasser le stade de la simple transmission d'un savoir pratique. Malgré les tracés inutilement complexes de certaines épures, Frézier parvient, dans cet ouvrage de plus de 1500 pages, d'une grande rigueur, systématique et progressif, à poser les principes essentiels de la géométrie descriptive. Il apparaît ainsi comme l'un des précurseurs directs de Monge.

La géométrie descriptive et les traités

Les procédés géométriques mis en œuvre dans ces différents traités pour déterminer les vraies grandeurs des panneaux utilisent, en fait, toutes les méthodes de la géométrie descriptive. Dès le traité de Delorme, on trouve le principe de la double (ou triple) projection pour représenter un objet, les vues étant clairement mises en correspondance par des lignes de rappel. D'ailleurs Monge se réfère explicitement « aux artistes qui font usage de la méthode des projections » (n° 8, p. 315) et prend soin de préciser que ce sont eux « qui ont coutume de supposer que des deux plans de projection l'un soit horizontal et l'autre vertical » (Desargues n'a pas eu la sagesse de suivre les coutumes des artistes !). Mais on trouve également, dans tous les traités dont nous avons parlé, de multiples exemples de rabattement d'un plan sur l'un des plans de référence, de rotation d'un plan, ainsi que l'utilisation de la méthode des plans auxiliaires pour déterminer l'intersection de deux surfaces, (explicitement chez Frézier, implicitement auparavant). Enfin, certaines épures des traités anciens (par exemple celle de la descente biaise chez Derand) sont très proches de celles des cours d'application de la géométrie descriptive à la coupe des pierres rédigés au XIXe siècle.

Mais une telle proximité apparente entre ces traités et la géométrie descriptive ne doit pas faire illusion. D'abord, elle nous semble d'autant plus forte que nous relisons aujourd'hui les traités de taille de pierre à travers le prisme de la théorie de Monge. Tous ces ouvrages — à l'exception de l'opuscule de Desargues — sont constitués d'une suite de cas particuliers traités séparément. La multiplication d'études de situations très proches, la confusion des textes d'accompagnement, comme la présence d'erreurs surprenantes (même chez Frézier) qui jouxtent les constructions géométriques les plus ingénieuses, montrent à quel point aucune théorie sous-jacente et unificatrice n'est présente dans l'esprit des auteurs de manuels.

Même le principe de la double projection, si souvent utilisé, n'est pas forcément perçu en tant que tel. Frézier, qui définit explicitement et utilise les projections horizontale et verticale d'un objet, écrit dans un paragraphe intitulé « de l'Arangement des desseins dans l'Épure » : « Quoiqu'il soit plus naturel de mettre chaque espèce de dessein à part ; il est cependant vrai que cette simplicité d'objet indique moins sensiblement les rapports des lignes, et que l'on retrouve en cela moins de commodité qu'à rassembler, et même quelquefois à mêler les *Plan*, Profil et Elévation : *on tiendra cependant pour arbitraire l'arangement de leurs situations, les uns auprès des autres, ou dans les autres, au dessus, au dessous, ou à côté* » [Frézier, 1737, p. 272].

1. Sur ce sujet, voir [Belhoste, Picon, Sakarovitch, 1990].

Loin de nous la volonté de minimiser le mérite des traités de stéréotomie. Les constructions géométriques sont souvent d'une extrême habileté, d'une grande économie dans le tracé et prouvent, de la part des auteurs, une maîtrise certaine d'un mode de représentation de l'espace. Comme les épures des appareilleurs sont tracées, grandeur nature, sur le sol ou sur une paroi verticale, il leur faut avoir des dessins aussi économes en place que possible, superposer les vues, éviter les lignes de rappel, minimiser les tracés. La rupture opérée par Monge a précisément consisté à se dégager de ces contraintes pratiques pour ne retenir que les modes opératoires utilisés. En cela, Monge a réalisé ce que Laplace décrétait, dans sa septième leçon à l'École normale, comme étant le propre du mathématicien.

Le cours de Monge sur la coupe des pierres ne nous est malheureusement pas parvenu. On sait pourtant, par différents témoignages dont celui de Brisson [1820, Avertissement, p. IX], qu'il l'enseigne longtemps à l'École de Mézières. A l'École normale, il n'a que le temps d'exposer la partie théorique de son cours, tandis qu'à l'École centrale des travaux publics les événements de prairial de l'an III et son départ pour l'Italie un an plus tard ne lui permettent pas d'enseigner la totalité des applications pratiques, pourtant essentielles à ses yeux. Cependant, l'appendice consacré à la coupe des pierres, publié à la fin du cours de géométrie descriptive de Hachette de 1822, est certainement très proche de l'esprit dans lequel Monge concevait ses leçons d'application. D'une part, Hachette y cite si fréquement son maître que, bien souvent, le lecteur ne sait plus lequel des deux s'exprime, et, d'autre part, les questions traitées correspondent exactement aux épures de l'an III préparées par Monge[1].

Entre cet appendice de Hachette — que nous prenons donc comme référence — et les traités anciens que nous avons décrits plus haut, deux différences nous semblent essentielles : la lisibilité des épures et la simplicité des textes d'accompagnement. La lisibilité des épures ne concerne pas seulement l'objet architectural représenté, dans son tout ou dans ses parties constituantes elle concerne également, et ce point est fondamental, les modes de construction de l'épure qui, de ce fait, se suffit à elle-même. « La géométrie descriptive, écrit Charles Dupin, rend sensibles toutes ses conceptions, toutes ses opérations et les grandeurs graphiques sont pour elle un moyen de peindre dans l'espace et sa marche et ses résultats » [Dupin, 1813, p. 237]. C'est en cela que la géométrie descriptive relève de l'esprit analytique tant magnifié dans les cours de mathématiques de l'École normale et que son insertion dans le cursus se justifie. Si la simplicité des textes d'accompagnement est relative, en ce qu'elle suppose l'acquisition des principes et méthodes de la géométrie descriptive, on en mesure pas moins toute l'économie que représente l'acquisition préalable d'une théorie adéquate. Bien sûr, mais nous ne reviendrons pas sur ce point, l'assurance qu'a le lecteur d'Hachette de posséder un outil opératoire pour traiter des situations non prévues au catalogue, constitue une différence d'une tout autre nature.

La géométrie descriptive et l'architecture clavée

Les apports de la théorie de Monge aux traités de taille des pierres du XIXe siècle sont donc patents. Mais on est en droit de formuler d'autres questions : cette théorie a-t-elle permis de proposer des tracés qui différeraient des modèles classiques de stéréotomie ? Ces modifications ont-elles été suivies d'effets et la façon traditionnelle d'appareiller les ouvrages clavés a-t-elle évoluée ? Enfin, cette théorie a-t-elle permis l'apparition de formes nouvelles en architecture ?

Si la réponse à la première question est positive, nous pensons que pour les deux

1. Nous connaissons deux séries d'épures de géométrie descriptive et de ses applications à la coupe des pierres et des bois, datant de l'an III. L'une due à Desclos-Lepeley (1778-1805, promotion 1794) est conservée à la BN sous la cote V 4829 in-fol. L'autre série, due à Lancret et George, se trouve à la Bibliothèque de l'École nationale des ponts et chaussées sous la cote 15. Dans cette même bibliothèque, sous la cote 1996, est conservée une série d'épures de Berge, datant de l'an V.

suivantes elle doit être négative, aussi surprenant que cela puisse paraître. Examinons quelques exemples permettant de légitimer ces assertions.

L'embrasure de fenêtre dite en arrière-voussure de Marseille fournit un premier exemple où la théorie des surfaces permet de donner un tracé d'épure plus précis que ceux qui apparaissent dans les traités de stéréotomie antérieurs au cours de Monge (cf. *fig.* 1).

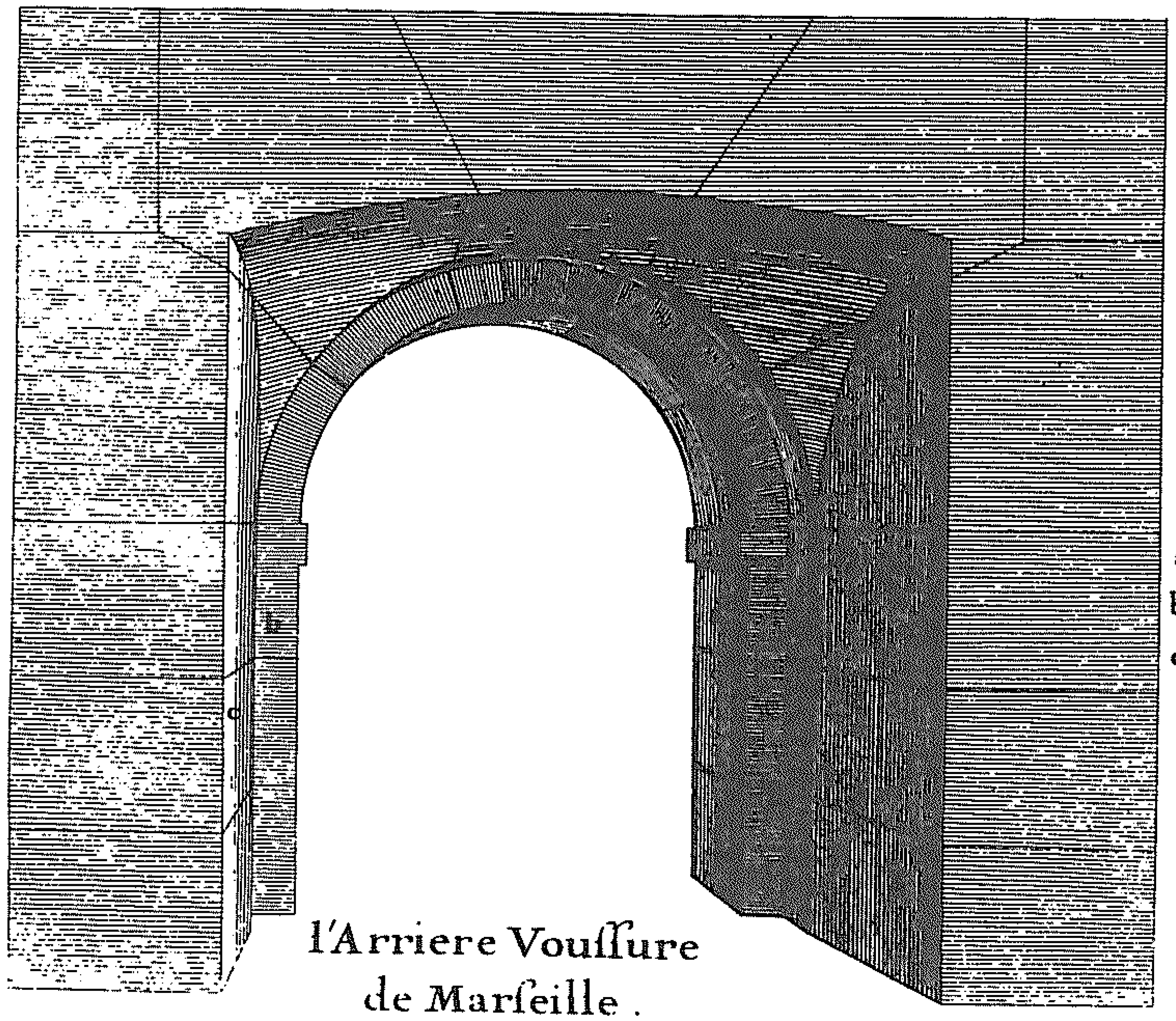

Fig. 1. — Arrière-voussure de Marseille.

Lorsqu'une fenêtre, dont la partie haute est cintrée, est encastrée dans un mur épais — ce qui est le cas des murs de pierre — la baie pratiquée dans celui-ci ne peut être réduite à l'exacte forme de la fenêtre. Il faut prévoir le débattement nécessaire à l'ouverture de chaque vantail et exhausser l'intrados de cette baie, la partie cintrée décrivant lors de son ouverture une portion de tore que l'on doit, au minimum, laisser libre. Dans l'architecture classique française, les formes adoptées prirent le nom du lieu où elles apparurent pour la première fois (arrière-voussure de Marseille, de Montpellier, de Saint-Antoine — en référence à la porte de Paris qui portait ce nom).

Dans le cas de l'arrière-voussure de Marseille (cf. *fig.* 2), la douelle d'intrados est une surface réglée dont les directrices sont le demi-cercle de la feuillure de la fenêtre (CYD sur l'épure), l'axe horizontal de la porte ($(O, O'Y')$), et un arc de cercle situé sur le nu intérieur du mur contenant la baie (arc EZF) délimité par les faces d'ébrasement (représentés sur l'épure par les plans verticaux $C'E'$ et $D'F'$). La portion de surface ainsi définie ne couvre donc pas tout l'espace correspondant à l'embrasure de la baie. Si l'on prolongeait fictivement l'arc EZF, la surface gauche couperait la face d'ébrasement $D'F'$ suivant une courbe qui, en général, ne permettrait pas au vantail de s'y appliquer librement. C'est pourquoi on complète la douelle en ajoutant à la directrice EZF une nouvelle branche FD, tracée sur la face d'ébrasement et choisie de manière à remplir la condition précédente.Le problème qui se pose alors est celui du raccordement des deux surfaces gauches qui ont en commun une génératrice. Pour éviter qu'une brisure

inesthétique ne mette en évidence cette double génération, il est nécessaire que les deux surfaces admettent même plan tangent, en tout point de cette génératrice commune. Un tracé rigoureux de cette arrière-voussure est donc un exemple d'application du théorème

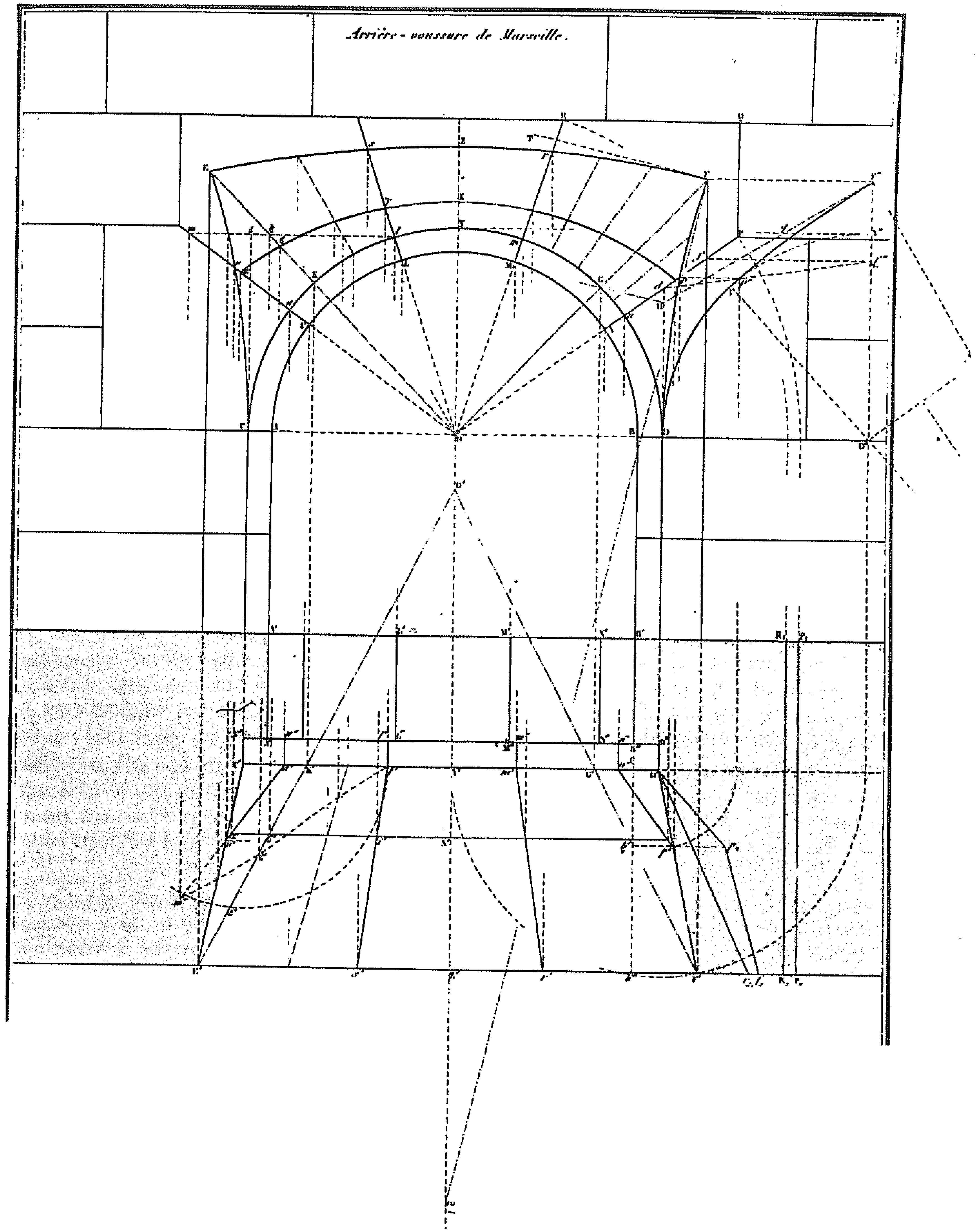

Fig. 2. — Arrière-voussure de Marseille. [Leroy, 1844].

de raccordement des surfaces gauches de Hachette [1822, p. 84] (cf. annexe 21). Il suffit que les deux surfaces admettent même plan tangent en trois points de la génératrice pour qu'elles se raccordent. Les deux surfaces, qui ont en commun outre la génératrice OGF, deux directrices (la droite de bout O et le demi-cercle de diamètre CD) admettent un même plan tangent au point O et au point G. Pour achever l'épure, il suffit donc de choisir la directrice FD de la seconde surface gauche de telle sorte que les deux surfaces admettent au point F un même plan tangent (et laisse libre le débattement du vantail). Leroy achève donc l'épure en déterminant la droite d'intersection FH du plan tangent en F à la première surface gauche et du plan vertical d'ébrasement, puis en choisissant la directrice FD de telle sorte qu'elle admette cette même droite FH comme tangente en F.

Avant l'énoncé de ce théorème — mais, il faut bien le reconnaître, sans doute aussi après — l'habileté du tailleur de pierres palliait une construction géométrique imprécise. Si bien qu'il est difficile de constater une différence nette entre les arrière-voussures de Marseille réalisées au XIXᵉ siècle et celles qui sont antérieures. D'autant plus que le raccordement des deux surfaces gauches s'effectue dans une partie rentrante d'un voussoir, ce qui interdit de procéder par panneau. Tout au plus, peut-on déterminer des galbes que l'on applique lors de la taille afin de savoir s'il reste encore de la pierre à abattre. Dans cette situation, le savoir-faire compte autant que le tracé géométrique.

La théorie de l'appareillage de Monge

Nous venons de donner un exemple d'application à la taille des pierres d'un théorème spécifique de géométrie descriptive. L'exemple choisi par Monge à l'École normale comme application à la stéréotomie (n° 24 p. 340 et n° 130 p. 418-420) est d'une autre nature. Monge veut montrer que le mode d'appareillage d'une voûte est totalement déterminé par la surface adoptée pour son intrados. Les voussoirs constitutifs de la voûte doivent, selon lui, satisfaire quatre conditions essentielles :

1) L'orthogonalité des joints du voussoir avec la surface de la voûte. Cette condition s'impose pour des raisons statiques, sinon dans l'action que deux voussoirs consécutifs exercent l'un sur l'autre, l'angle plus petit que l'angle droit serait exposé à éclater.

2) L'orthogonalité des joints d'un même voussoir. Cette demande répond au même problème statique que le point précédent mais présente aussi un avantage d'ordre esthétique puisqu'ainsi les lignes qui divisent la voûte en assise sont perpendiculaires à celles qui divisent une même assise en voussoir.

3) Les surfaces des joints des voussoirs doivent être développables. Cette considération est d'ordre pratique : si une telle surface n'était pas réglée, elle ne serait réalisable ni assez rapidement pour que l'ouvrage soit économiquement viable, ni assez précisément pour assurer un bon contact entre les voussoirs. Que cette surface soit de plus développable permet, par l'utilisation de panneaux pour le tracé, une plus grande précision.

4) Les lignes de division de la surface doivent aussi porter le caractère de la surface. Cette exigence, purement esthétique, semble s'imposer au géomètre avec autant de force que les précédentes. Si l'appareillage est laissé nu, les lignes de joint redessinent sur la voûte la surface elle-même et les « convenances », pour reprendre la terminologie de Monge, exigent une harmonie parfaite entre le dessin et la limite physique de l'intrados.

Or, il n'existe pas d'autres lignes sur la surface courbe qui puissent remplir en même temps toutes ces conditions, que les deux suites de ligne de courbures, et elles les remplissent complètement. Pour résoudre les problèmes statique, géométrique, esthétique et pratique que pose l'appareillage des voûtes, la seule solution consiste à choisir comme lignes de joint les lignes de courbure de la surface. Les conditions 1 et 3 énoncées ci-dessus, suffisent d'ailleurs, à elles seules, à imposer de suivre les lignes de courbure ; si bien que l'on peut également voir, dans l'énoncé de ces conditions, un exposé des propriétés remarquables des lignes de courbures (et cette pensée n'était sûrement pas absente du pédagogue qui avait à cœur de montrer les côtés pratiques des propriétés géométriques). Quoi qu'il en soit, ce que Monge propose dans ses leçons n'est pas un simple exemple

d'application de la géométrie descriptive à la taille des pierres, mais une véritable théorie de l'appareillage.

Comme il le remarque immédiatement après sa démonstration, dans le cas des surfaces simples (surfaces de révolution, cylindres, ...), les appareilleurs s'étaient spontanément conformés à cette loi. Il n'en va plus de même, naturellement, dans le cas de surfaces plus complexes. Monge prend comme exemple l'ellipsoïde, surface qu'il a étudiée antérieurement [Monge, 1795] et dont il a déterminé les lignes de courbure (cf. *fig.* 3), établissant que ce sont des courbes gauches dont l'une des familles se projette horizontalement selon des ellipses et l'autre selon des hyperboles.

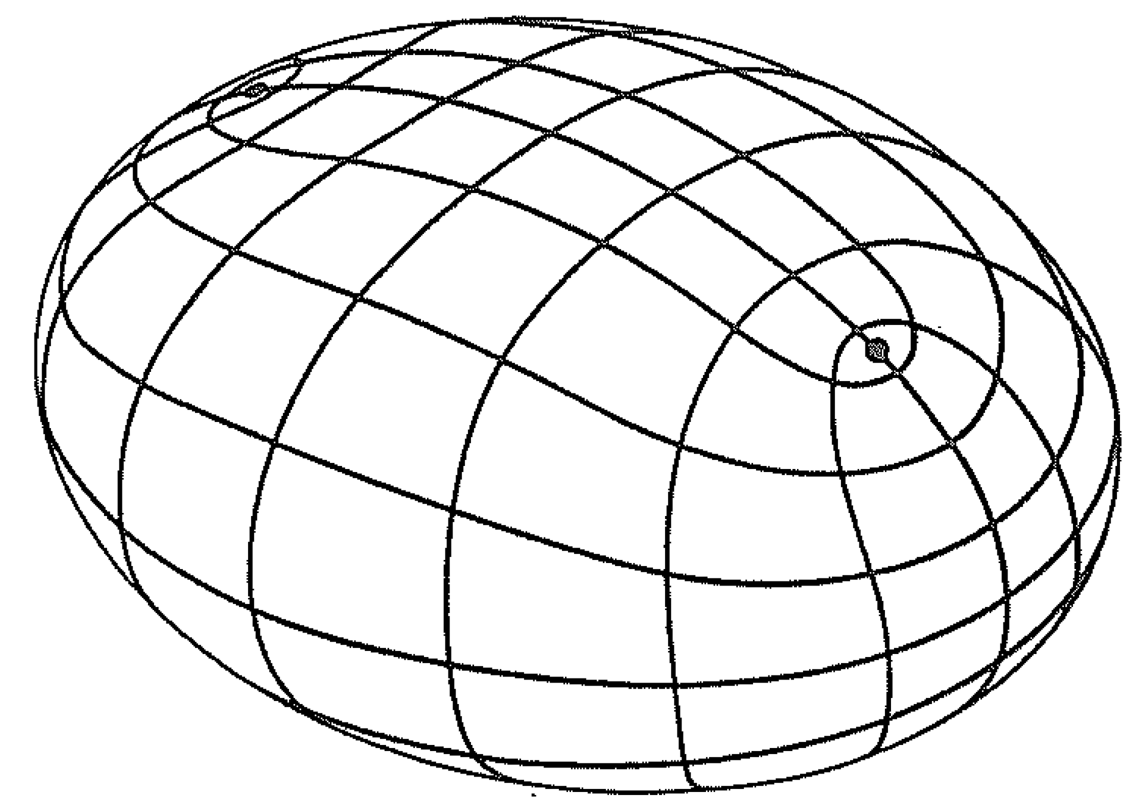

Fig. 3. — Lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Les deux familles de courbes permettent de définir deux points limites qu'il a appelés ombilics. Les voûtes ellipsoïdes, très fréquentes dans l'architecture baroque et classique (on en trouve à Saint-Pierre de Rome, dans les églises de la Sorbonne, du Val-de-Grâce, des Invalides...) furent traditionnellement appareillées, comme les voûtes sphériques ou les ellipsoïdes de révolution, avec des rangs d'assise horizontaux (cf. *fig.* 4). Monge décrit ce que pourrait être un amphithéâtre idéal qui respecterait la géométrie de la surface : « De toutes les formes qu'on pourrait donner à l'amphithéâtre, il n'y en a aucune dont la loi soit plus simple et plus gracieuse que l'ellipse ; il faudrait donc que la salle fût elliptique, et qu'elle fût couverte par une voûte.

« Le service des Assemblées législatives exige un emplacement pour le bureau, en devant duquel est la tribune de l'orateur. En plaçant le bureau à l'un des sommets de l'ellipse, on pourrait lui conserver un espace suffisant pour la commodité du service, et l'orateur se trouverait naturellement placé sous un des ombilics de la voûte ; l'amphithéâtre n'occuperait que la partie qui serait en avant. ... La salle qui n'aurait ni tribune ni aucune espèce d'irrégularité, pourrait être décorée par des colonnes, à chacune desquelles correspondrait une nervure de la voûte, pliée suivant la ligne de courbure ascendante. Toutes ces nervures, verticales à leur naissance, se courberaient autour de l'un ou l'autre ombilic, redescendraient ensuite à-plomb sur les colonnes opposées, et elles seraient croisées perpendiculairement par d'autres nervures pliées suivant les lignes de l'autre courbure. Les intervalles de ces nervures pourraient être à jour, soit pour éclairer la salle, soit pour donner des issues à l'air, et formeraient un vitrage moins fantastique que les roses de nos églises gothiques. Enfin deux lustres suspendus aux ombilics de la voûte, et à la suspension desquels la voûte entière semblerait concourir, serviraient à éclairer la salle pendant la nuit.

« Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails à cet égard ; il nous suffit d'avoir indiqué aux artistes un objet simple, et dont la décoration, quoique très riche, pourrait n'avoir rien d'arbitraire, puisqu'elle consisterait principalement à dévoiler à tous les yeux une ordonnance très gracieuse, qui est dans la nature même de cet objet. »

Monge devait tenir à ce texte, car il le reprit plusieurs fois [1795, Feuille n° 20, 1796, p. 162-163] ; Hachette [1822, p. 293] et Leroy (1842, p. 366-367) le citent intégralement dans leur cours de stéréotomie. Plus qu'une simple description d'un amphithéâtre (ou une

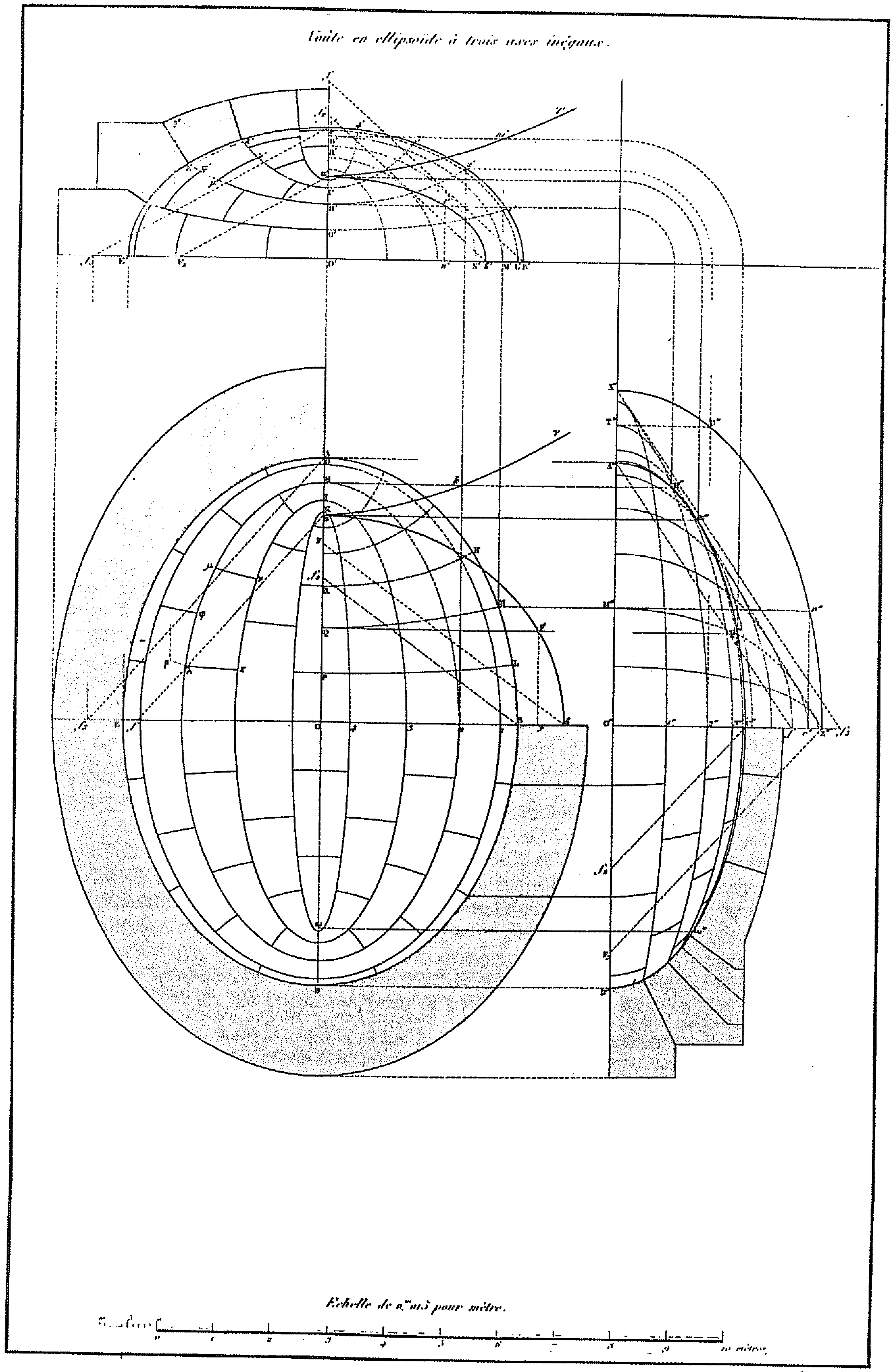

Fig. 4. — Voûte-ellipsoïde appareillée selon les lignes de courbure [Leroy, 1844].

proposition pour la salle de l'Assemblée nationale alors en discussion), c'est une conception de l'architecture qui s'exprime ici, une conception qui réduit l'architecture à la géométrie.

Monge, dans son article du *Journal de l'École polytechnique*, explique, peu avant le passage ci-dessus, que (les artistes) « excluaient presque généralement de la composition des voûtes [...] les surfaces courbes dont ils ne connaissaient pas les lignes de courbure, lors même que les circonstances les exigeaient impérieusement ; et c'est à cela principalement qu'on doit attribuer le mauvais effet que produisent en général dans l'architecture, les morceaux de traits de coupe de pierres, parce que pour rendre un trait exécutable, on ne choisit pas toujours la surface de la voûte la plus convenable » [Monge, 1796, p. 149]. Hachette reprend également à son compte cette violente critique des appareilleurs.

Dès lors, on pourrait s'attendre, après les cours de Monge et de ses disciples, à un renouveau des formes et des volumes mis en œuvre dans la stéréotomie. Force est de constater qu'il n'en est rien. Nous n'avons pu trouver d'exemple ni de réalisation architecturale clavée faisant intervenir des surfaces nouvelles, ni de voûte dont l'intrados est une surface complexe qui soit appareillée conformément à la théorie de Monge. La théorie des lignes de courbure n'a donc pas eu, en taille des pierres, l'influence que les géomètres du début du XIXe siècle espéraient.

Il est vrai que la difficulté première pour évaluer l'impact réel de la théorie de Monge sur la stéréotomie vient du fait que celle-là apparaît au moment où celle-ci décline. L'escalier de l'archevêché de Bordeaux (1772-78) ou la trompe de l'église Saint-Sulpice (1774) ne doivent pas faire illusion ; ils font partie des derniers chefs-d'œuvre de la stéréotomie française. La seconde moitié du XVIIIe siècle est marquée par la destruction des archétypes (destruction de la porte Saint-Antoine, en 1778), le développement de l'utilisation de la voûte en brique, plus légère et plus économique que la voûte clavée, l'apparition des escaliers suspendus à marches porteuses, et l'utilisation de la charpente à petits bois de Delorme. Accompagnant l'évolution technique, l'évolution esthétique accentue le phénomène. « Le bon goût a proscrit les trompes de l'architecture civile », écrit Douliot [1825, p. 165] ; le « bon goût » condamne même globalement la stéréotomie, jugée baroque. On détruit au XIXe siècle bien plus de chefs-d'œuvre de stéréotomie que l'on en construit. La seconde moitié du XIXe siècle connaît un certain renouveau, éphémère et limité, de la stéréotomie dans les immeubles urbains en France, ou en Espagne avec Gaudi, sans que l'on trouve trace, dans les réalisations d'une théorie mathématique plus poussée que celle utilisée au XVIIIe siècle.

Les limites de la théorie de Monge

Si la stéréotomie n'est plus en vogue dans l'architecture au XIXe siècle, en revanche, dans les travaux publics, la construction des « ponts biais » en pierre — c'est-à-dire ceux pour lesquels la direction du tablier n'est pas orthogonale à celle de la voie franchie — pose de délicats problèmes d'appareillage et donne lieu à une importante littérature. Les ponts biais font leur apparition au moment de la mise en place des réseaux de chemin de fer. Dans l'article qui marque le point de départ des études théoriques sur le sujet, Lefort cite intégralement le passage du cours de Monge concernant l'appareillage des voûtes pour constater que cette « analyse, si bien faite, [...] fait presque complètement abstraction de l'élément mécanique qui domine la question. Il est nécessaire, en effet, de diriger les surfaces des joints normalement à la surface des pressions maxima qui doivent naître au décintrement » [Lefort, 1839, p. 290]. Or cette surface, pour une voûte extradossée parallèlement (c'est-à-dire suivant une surface de même nature que celle de la douelle) est la surface normale à la ligne de plus grande contraction, ligne qui ne se confond pas nécessairement avec la ligne de plus petite courbure de la surface. Les différentes solutions proposées — appareillage hélicoïdal adopté en Angleterre, appareillage orthogonal parallèle ou convergent, appareillage cycloïdal dû au fils Hachette — déterminent « des lignes d'assises et de joints (qui) diffèrent notablement des lignes de plus grande et de moindre courbure que la considération exclusive de la partie géométrique de la question avait fait admettre à Monge. Nous ferons remarquer, d'ailleurs, que la conditions elle-même d'avoir des joints normaux à la voûte est plus géométrique que mécanique, et la véritable définition de la surface de joint serait celle-ci : Cette surface doit être telle que la normale en un point donné du joint soit dirigée suivant la résultante des pressions en ce point » [Graeff, 1867, p. 12]. La critique de Graeff, ingénieur en chef des ponts et chaussées, est profonde et pertinente. Bien sûr, Monge ne pouvait avoir présent à l'esprit un problème qui s'est posé, nous l'avons dit, postérieurement à son cours. Néanmoins, apparaît ici clairement une restriction à la généralité de la solution proposée par Monge, qui n'est « entièrement satisfaisante [que] lorsque la surface de la voûte est telle que la ligne de plus petite courbure passant par chacun de ces joints [peut] être tracée tout entière sur la douelle dans sa partie supérieure aux pieds droits » [Lefort, 1839, p. 291].

Entre les changements de mode en architecture et les limites intrinsèques de la théorie, l'appareillage des voûtes selon les lignes de courbure n'a pas eu le succès escompté. La géométrie descriptive s'est appliquée avec plus de bonheur dans la technique des voiles de béton, donnant là l'occasion d'un renouvellement des formes employées en architecture. On regrette néanmoins de ne pouvoir admirer une réalisation architecturale née du mariage de la théorie de Monge et du savoir-faire des appareilleurs.

J.S.

ANNEXE 16

Les problèmes de défilement

Dans son cours de l'École normale, Monge ne fait qu'une rapide allusion aux problèmes du défilement des fortifications, présentés incidemment comme une application du problème général de la détermination d'un plan tangent à une ou deux surfaces données. Pourtant, les problèmes de défilement ont joué un rôle important dans la genèse de la géométrie descriptive à l'École du génie de Mézières. D'après Charles Dupin, c'est en résolvant une question de défilement que Monge, encore jeune dessinateur à la gâche, se fit remarquer du directeur de l'école, Chastillon ou plus probablement Du Vignau, qui l'avait fait venir à Mézières [Dupin, 1819, p. 12-13]. Il parvint par une méthode géométrique nouvelle à résoudre rapidement, à la grande surprise du directeur, un problème qui demandait jusque-là des calculs interminables et monotones. Ce fut le point de départ de ce qui allait devenir la géométrie descriptive. Si rien ne permet d'authentifier catégoriquement cette anecdote, qui remonterait aux années 1765-1766, le rôle joué par les problèmes de défilement dans la genèse de la géométrie descriptive, confirmé par Hachette [Hachette, 1822, Préface, p. VI], ne fait pas de doute.

Le défilement des fortifications

Avant d'examiner plus avant l'historique du problème, nous rappellerons brièvement en quoi consiste cette question d'art militaire. Nous utiliserons la terminologie proposée par Horace Say, le premier à l'avoir traitée dans toute sa généralité en utilisant la géométrie descriptive [Say, 1796].

Défiler une fortification, c'est disposer ses parapets en sorte qu'ils protègent l'*espace intérieur* des coups directs de l'ennemi installé dans l'*espace extérieur*. Compte tenu de la portée des canons à la fin du XVIIIe siècle, l'espace extérieur dont on veut se couvrir s'étend jusqu'à quatorze-cents mètres au-delà des parapets. Il est limité supérieurement par la *surface extérieure*, située à une certaine hauteur au-dessus du terrain environnant, qui dépend des possibilités qu'a l'ennemi de surélever ses batteries. De même, l'espace intérieur est limité supérieurement par la *surface intérieure*, située au-dessus du terrain délimité par l'enceinte à une hauteur égale à celle des parapets. Comme le remarque Horace Say, les problèmes de défilement ont une grande analogie avec celui des ombres : les coups directs remplacent les rayons lumineux, l'espace extérieur et la surface extérieure respectivement le corps lumineux et sa surface, la masse des parapets le corps opaque et l'espace défilé, qui doit contenir lui-même l'espace intérieur de la fortification, l'ombre portée.

Si la théorie du défilement n'est pas fondamentalement différente de celle des ombres au flambeau, la difficulté vient du fait qu'à la surface du corps lumineux, réduite en général à celle d'une sphère, il faut substituer ici une surface extérieure qui dépend du relief du terrain. Si le terrain est plat, la surface extérieure est un plan horizontal et tous les problèmes de défilement se résolvent immédiatement. Les problèmes deviennent beaucoup plus délicats quand le terrain est accidenté. L'espace défilé est alors limité par la surface

IV LIVRES ET GRAVURES

Il sera procédé nécessairement à la confection du cours de géométrie descriptive et si l'impression ne peut pas être poussée de manière à suivre l'instruction pour la 1ère année, il faut au moins que la gravure des épures soit poussée avec assez de rapidité pour que l'instruction ne soit pas retardée. Il faut donc que des fonds soient sur le champ destinés à cet objet, et pour le traitement d'un citoyen qui est extrêmement propre à dessiner les épures, et qui sous la direction des juges du concours les distribuera aux graveurs.

On remarque qu'ici le luxe est désirable ; il faut que les gravures soient trez bien exécutées et que l'écriture soit dirigée par les *meilleurs maîtres.*

R. T.

ANNEXE 21

La géométrie descriptive après Monge

Comme tous les historiens des sciences, Coolidge voit dans les leçons de Monge à l'École normale l'acte de naissance de la géométrie descriptive [1]. Mais, de plus, il considère que cette discipline meurt avec les *Suppléments* publiés par Hachette [2]. Il ne fait pas de doute que, pour Coolidge, la brièveté de la vie mathématique de cette branche de la géométrie vient de son manque de richesse théorique. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point, qui ne nous semble pas entièrement conforme au contenu et au devenir des cours de Monge. Mais, au préalable, nous voudrions faire remarquer que la très faible évolution des cours et traités de géométrie descriptive au XIXe siècle par rapport au cours fondateur vient également du haut degré de perfection de ce dernier.

On peut avancer plusieurs hypothèses pour expliquer l'état de quasi-achèvement de cette discipline lors même de sa fondation théorique et institutionnelle. En premier lieu, le principe de base sous-jacent (la double projection) et les méthodes employées (changement de plan, rotation, rabattement, surfaces auxiliaires pour déterminer les intersections de surface) sont assez simples et, s'ils n'avaient jamais été formalisés antérieurement, du moins étaient-ils utilisés empiriquement depuis longtemps (cf. annexe 15). De plus, quand Monge expose la géométrie descriptive à l'École normale, il y avait déjà vingt ans ou plus qu'il l'avait conçue, et il l'avait enseignée, au moins partiellement, durant de nombreuses années. Enfin, on y voit naturellement la marque du talent de Monge, de son talent de pédagogue si souvent loué par ses disciples, et surtout de son talent de géomètre qui lui permet de saisir avec pertinence la nature profonde des problèmes soulevés.

1. Les méthodes de la géométrie descriptive

Si l'enseignement de la géométrie descriptive n'a que peu évolué au cours du XIXe siècle, les traités vont néanmoins se peaufiner dans leur forme, se préciser dans leur présentation, s'enrichir dans l'exposé des résultats de la théorie. Nous n'insisterons pas ici sur le choix des notations dans les différents traités, sauf pour remarquer que celles utilisées par Monge ne sont pas toujours homogènes. Leroy (1780 ? - 1854), au contraire, insiste sur ce point dans l'introduction de son *Traité de géométrie descriptive* (qui connut quinze éditions de 1842 à 1910 !) : « Il est bien essentiel [...] que les épures soient toujours tracées d'après un mode de ponctuation soumis à des règles constantes » [1842, Avertissement, p. IV]. C'est ce que feront, après lui, tous les auteurs de manuels. Nous n'insisterons pas davantage sur l'enrichissement progressif de la terminologie de cette discipline avec l'apparition de

1. Voir [Coolidge, 1940].
2. En 1811, Hachette réédita les cours de géométrie descriptive de Monge. Cette nouvelle édition était enrichie, très certainement avec l'accord de Monge, des *Suppléments* rédigés par Hachette.

termes que Monge n'emploie pas, comme « ligne de terre, ligne de rappel, droites et plans frontaux ou de bout », et qui évitent de lourdes circonlocutions.

Plus intéressants nous semblent être les efforts effectués par les successeurs de Monge pour dégager et présenter les méthodes de la géométrie descriptive (i.e. les opérations de rotation, rabattement et changement de plan). Elles apparaissent naturellement dans les leçons à l'École normale, mais elles ne font pas l'objet d'un exposé séparé et systématique. Elles sont simplement utilisées à l'occasion, lors de la résolution de certains problèmes. De ce fait, le lecteur les perçoit peu aisément et Monge est obligé d'itérer des constructions similaires lorsque des problèmes différents se résolvent par des méthodes identiques. Par exemple, lors de la sixième leçon (n° 67, p. 377), Monge détermine la vraie grandeur de l'intersection d'un cylindre et d'un plan défini par ses traces, en rabattant ce plan sur le plan horizontal de projection. A cette occasion, Monge explique à nouveau le tracé du rabattement d'un point du plan qu'il avait pourtant déjà eu l'occasion de donner lors de la quatrième leçon, pour la détermination de l'angle de deux droites concourantes (n° 20, p. 338). De plus, à la méthode du rabattement est associée la méthode dite « des points fixes » qui consiste à déterminer le rabattement d'un point P quelconque en faisant intervenir le rabattement d'un point A supposé connu et le point de la droite PA restant fixe dans l'opération de rabattement. Or Monge, qui utilise la méthode des points fixes à d'autres moments de son cours (par exemple au paragraphe suivant), préconise de tracer la vraie grandeur de l'intersection en itérant la construction donnée pour un point, ce qui alourdit considérablement l'épure. Il est certain que cette maladresse vient de l'absence d'un exposé spécifique concernant la méthode du rabattement.

On doit à Leroy d'avoir consacré, pour la première fois, dans son traité de 1842, un paragraphe de son cours à « la théorie des changements de plan de projection », et à Th. Olivier, professeur de géométrie descriptive à l'École centrale des arts et manufactures de 1829 à 1853, le premier exposé systématique de ces notions dans un chapitre de son cours, intitulé « Les problèmes fondamentaux de la géométrie descriptive » [Olivier, 1843]. Cette présentation met encore quelque temps à s'imposer dans les manuels. Chevillard, dans un article consacré à l'enseignement de la géométrie descriptive, se livre à un vibrant plaidoyer de « la méthode des changements de plans d'Olivier », répondant point par point aux critiques qu'elle suscitait (« ces méthodes sont inutiles, puisqu'on faisait de la géométrie descriptive avant Olivier, [...] » [Chevillard, 1856, p. 202]). Chevillard montre l'avantage de cet exposé systématique, à la fois pratiquement pour le tracé des épures et théoriquement pour une meilleure compréhension des méthodes de résolution d'un problème. Cet élément nous semble être le seul apport fondamental postérieur au cours de Monge concernant l'enseignement élémentaire de la géométrie descriptive.

2. *Les nouveaux résultats*

Quant aux progrès de la théorie elle-même, ils furent essentiellement le fait des mathématiciens de l'École polytechnique. Monge lui-même ne publie pratiquement pas de nouveaux résultats de géométrie descriptive après l'an III. Hachette, qui lui succède dès 1796 dans l'enseignement de la géométrie descriptive à l'École polytechnique, y consacre au contraire une part importante de son activité mathématique. Ses premières recherches sont bientôt poursuivies par celles de certains des plus brillants élèves que comptera cette École.

Courbure des lignes et lignes de courbure

« De toutes les propositions d'analyse appliquées à la géométrie, les plus importantes sont relatives à la courbure des lignes et des surfaces. En les démontrant, par des considérations dégagées de tout calcul, on augmente le domaine de la géométrie, et les théories les plus abstraites deviennent applicables aux arts les plus usités », écrit Gergonne en introduction à la réédition d'un article de Hachette dans sa revue [Hachette, 1816*b*, p. 24]. Et de fait, les problèmes liés aux notions de plans osculateurs, de rayons de courbure et centre de courbure de courbes gauches fournissent à la géométrie descriptive

son champ d'application le plus fertile. Lancret, Dupin, Hachette, Poncelet, Olivier et Chasles publient articles et résultats sur ce sujet [1].

La méthode donnée par Hachette, pour déterminer le plan osculateur d'une courbe gauche en un point, consiste à faire intervenir les normales à chacune des deux surfaces dont la courbe est supposée être l'intersection (selon la conception constante de Monge). On obtient ainsi deux surfaces gauches auxiliaires qui permettent de déterminer non seulement le plan osculateur cherché mais également le centre de courbure de la courbe au point courant (cf. [Hachette, 1816*a*]). En utilisant une courbe auxiliaire qui est l'intersection des tangentes à la courbe donnée avec un plan quelconque, Chasles propose un procédé plus rapide que celui donné par Hachette pour déterminer le plan osculateur ([Chasles, 1837*a*, p. 296]). Par contre, il ne donne pas le centre de courbure qui nécessite une construction supplémentaire. Dupin et Poncelet, qui présentent des solutions différentes, utilisent tous deux les centres de courbure des courbes planes qui sont les projections de la courbe donnée (cf. [Dupin, 1817] et [Poncelet, 1825]).

La détermination des lignes de courbure d'une surface courbe fait également partie des problèmes évoqués par Gergonne. Les leçons de Monge à l'École normale fournissent le premier exposé heuristique sur le sujet (cf. n° 116 à 126, p. 413-417). A l'École centrale des travaux publics, Monge donne, dans ses *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie*, l'équation des lignes de courbure de l'ellipsoïde [Monge, 1796, F.19 et 20]. Dupin, dans un article de la *Correspondance sur l'École polytechnique* [1806], détermine direction et rayon de courbure des lignes de courbure en un point quelconque d'une surface quelconque, connaissant la courbure au point considéré de trois sections arbitraires de cette surface. Les articles de Dupin [1813*b*], Chasles [1814], Durrande [1817], fournissent d'autres exemples de détermination de courbes inscrites sur une surface donnée et soumises à certaines autres considérations (toucher trois autres courbes données, etc.).

Détermination des tangentes

Autre type de problème auquel s'intéressent les successeurs de Monge, celui de la détermination des tangentes aux courbes projections d'une courbe gauche, elle-même toujours définie comme étant l'intersection de deux surfaces données. La solution générale, exposée par Monge dans les leçons de l'École normale, est aisée, puisque l'intersection des deux plans tangents aux deux surfaces données définit la tangente à la courbe gauche, et la projection de cette tangente est encore tangente à la projection de la courbe. Cette solution est toutefois inopérante lorsque la tangente à la courbe gauche est perpendiculaire à l'un des deux plans de projection. Or ce cas, relativement fréquent dans la pratique, se présente par exemple dans certaines épures de stéréotomie et de chaudronnerie. Le problème, plus simple que les précédents dans son énoncé, est donc néanmoins riche tant sur le plan théorique que pratique. Il est étudié par Hachette [1815], puis Binet [1815] qui donne une première réponse en définissant la tangente en un point à une courbe gauche (toujours considérée comme intersection de deux surfaces) comme la droite perpendiculaire au plan formé par les normales aux deux surfaces en ce point. Cette construction, aussi générale que celle de Monge, permet de résoudre le problème évoqué lorsque les deux surfaces qui définissent la courbe gauche sont de révolution et d'axes concourants.

La solution pour deux surfaces quelconques est donnée par Chasles dans un article magistral où il montre comment ce problème des tangentes se ramène à celui de la détermination du plan osculateur de la courbe au point courant. La construction de Chasles coïncide avec celle de Binet quand les conditions d'application de celle-ci sont remplies. « Les considérations précédentes font bien voir pourquoi les méthodes générales pour la construction des tangentes aux projections des courbes devaient être en défaut pour le cas en question, conclut Chasles, [...] sans quoi, elles eussent fait connaître, par la considération des infiniment petits du premier ordre seulement les plans osculateurs aux

1. Voir [Lancret, 1805] ; [Dupin, 1806, 1813*a*, 1817, 1822] ; [Hachette, 1816, 1816*a*, 1816*b*, 1817] ; [Poncelet, 1825] ; [Olivier, 1834, 1839] ; [Chasles, 1837*a*].

différents points d'une courbe à double courbure : ce qui est contraire à la nature des choses » [Chasles, 1837*b*, p. 198].

Étude des surfaces et problèmes géométriques

La géométrie descriptive est naturellement l'outil privilégié pour l'étude de surfaces comme, par exemple, l'hyperboloïde à une nappe ([Hachette, 1812], [Lamé, 1814]) qui s'introduit, de façon annexe, dans plusieurs constructions. Monge en donne un exemple dans ses leçons à l'École normale (n° 47, p. 361-364) où il utilise, sans le nommer, un hyperboloïde de révolution pour déterminer le plan tangent à une surface de révolution passant par une droite donnée. Olivier en donne aussi plusieurs exemples d'utilisation. C'est ainsi qu'il détermine, très élégamment, un plan qui coupe un cône de révolution donné selon une ellipse dont les axes sont de rapport donné, en faisant intervenir un hyperboloïde de révolution dont le cône est asymptote [Olivier, 1843, p. 250-251]. Dans le champ de la théorie des surfaces réglées [1], le théorème d'Hachette (à qui l'on doit le nom de telles surfaces) est sûrement le plus fécond pour les applications. Ce théorème démontré en 1799 par Hachette, mais qui dérive directement des cours de Monge [2], énonce qu'une condition suffisante pour que deux surfaces réglées distinctes qui possèdent en commun une génératrice se « raccordent », c'est-à-dire admettent même plan tangent en tout point de cette génératrice, est que cette propriété soit vérifiée en trois points distincts de cette génératrice [Hachette, 1822, p. 84]. Ce théorème, dont la démonstration fait également intervenir un hyperboloïde annexe, s'applique en taille des pierres (cf. annexe 15), à la théorie des ombres (détermination de la ligne séparatrice d'ombre des filets d'une vis triangulaire [Hachette, 1809, 1814]), et à la théorie des engrenages [Olivier, 1842, et 1847].

Certains problèmes de géométrie, plus ou moins anciens, vont également pouvoir être résolus de façon plus élégante par les méthodes de la géométrie descriptive. Par exemple, le problème de la détermination d'une sphère tangente à trois (ou quatre) sphères données, déjà étudié par Monge dans son cours, est repris par Hachette [1804, 1812] et Dupin [1813*b*]. De même, le problème « de la pyramide triangulaire » qui consiste à montrer que trois des six angles définis aux sommets d'une pyramide triangulaire (les trois angles que les arêtes forment deux à deux et les trois dièdres que les faces forment deux à deux) suffisent pour retrouver les trois autres, avait déjà été abordé dans le traité de stéréotomie de de La Rue [1728] et repris de façon systématique par Frézier [1737]. Monge n'étudie pas cet exemple dans ses leçons à l'École normale, mais il le traite dans son cours à l'École centrale des travaux publics [3].

3. *Influence des leçons de Monge*

Nous avons donné quelques exemples de résultats obtenus par les successeurs de Monge à l'aide de la géométrie descriptive. Mais les conséquences les plus profondes de cette théorie sur l'histoire des mathématiques sont d'une autre nature. Elle a fortement contribué au changement d'esprit qui s'opère au début du XIXe siècle chez les mathématiciens. A la suite de Monge, ils ont pris conscience que « la géométrie regardée depuis plus d'un siècle comme impuissante par elle-même, et devant tirer toutes ses ressources et ses acquisitions de l'analyse algébrique, était, au contraire, susceptible de principes généraux et de méthodes fécondes comme celles de l'analyse ; que ces méthodes avaient même parfois des avantages propres, en permettant de pénétrer jusqu'à l'origine des vérités et de mettre à nu la chaîne mystérieuse qui les relie entre elles » [Chasles, 1870, p. 81].

1. Une surface est dite « réglée » si elle peut être engendrée par une droite dont la position dépend d'un paramètre ou, dans la terminologie du XIXe siècle, par une droite soumise à trois conditions simples comme s'appuyer sur trois courbes données, toucher trois surfaces données, etc. Toute surface développable est réglée.
2. Voir [Taton, 1951*a*].
3. Cours des 8 et 11 germinal, voir tableau p. 292.

Géométrie et analyse

Ce changement d'esprit vis-à-vis de la géométrie apparaît très clairement dans les différents traités et mémoires de géométrie descriptive des successeurs de Monge. Le souci, la volonté de reconquérir sur l'analyse un terrain qui avait échappé jusqu'alors à la géométrie, sont constamment soulignés. « Ce qui est remarquable dans ces propositions, écrit Hachette à propos de théorèmes sur les surfaces réglées, c'est qu'elles ramènent une construction géométrique qui dépendait d'une analyse transcendante à la solution d'un problème de géométrie très simple [Hachette, 1818, introd., p. XII]. De même, il introduit « les notions de courbure ou de contact du second ordre, qui ont été jusqu'à présent le domaine exclusif de l'analyse appliquée à la géométrie » [*Ibidem*]. Leroy, ayant énoncé le théorème d'Euler sur les rayons de courbure d'une surface [1] précise « c'est l'unique emprunt que nous ferons à l'analyse... nous allons ensuite développer, par la géométrie seule, les conséquences intéressantes dont ce théorème est susceptible » [Leroy, 1842, p. 339]. D'une façon analogue, Olivier insiste sur le fait qu'il a « bien démontré, sans avoir besoin de recourir à l'*analyse* et en ne se servant que des méthodes de la *géométrie descriptive*, que la surface engendrée par une droite se mouvant sur trois droites données est [...] un hyperboloïde à une nappe » [Olivier, 1843]. (Cette démonstration fut donnée pour la première fois par Chasles lorsqu'il était élève à l'École polytechnique [Chasles, 1813].)

Ce faisant, ces auteurs sont sûrement dans la droite ligne du père fondateur de la géométrie descriptive. Olivier rapporte, dans la préface de son manuel, ces propos de Monge : « Si je refaisais mon ouvrage qui a pour titre *De l'Analyse appliquée à la géométrie*, je l'écrirais en deux colonnes : dans la première, je donnerais les démonstrations par l'analyse ; dans la seconde, je donnerais les démonstrations par la géométrie descriptive, et l'on serait peut-être, ajoutait-il, bien étonné, en lisant cet ouvrage, de voir que l'avantage serait presque toujours du côté de la seconde colonne, pour la clarté du raisonnement, la simplicité de la démonstration, et la facilité de l'application des théorèmes trouvés aux divers travaux des ingénieurs » [Olivier, 1843, p. VI]. Le parallélisme exact qui existe entre les premières *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie*, distribuées à l'École centrale des travaux publics, et les leçons de géométrie descriptive, est sans doute une première ébauche de ce projet. Il lui aurait été toutefois difficile de rédiger ainsi les leçons de l'École normale : le privilège de l'analyse paraissait un dogme intouchable [2].

Quoi qu'il en soit, la nécessité et l'intérêt d'un double éclairage pour résoudre un problème de géométrie dans l'espace sont soulignés à plusieurs reprises dans les leçons à l'École normale. Il est d'ailleurs remarquable que cet aspect apparaisse très tôt dans l'œuvre de Monge. Par exemple, dans son mémoire sur les surfaces développables [Monge, 1780], pour déterminer la surface réglée passant par trois courbes données, il rapporte « tout ce qui est dans l'espace par des projections orthogonales » [Monge, 1780, p. 435-436] sur deux plans, l'un horizontal l'autre vertical, et s'appuie constamment sur des arguments de la géométrie descriptive.

Monge, précurseur de Poncelet

Cette « fusion intime », pour reprendre une expression de Poncelet [Poncelet, 1822, Introd., p. XX], de deux manières de démontrer une propriété permet d'apporter, à la méthode analytique, l'intuition géométrique. Mais elle a également d'autres conséquences. « Le fait que les démonstrations analytiques, établies dans le cas des éléments réels, s'étendent au cas où certains de ceux-ci deviennent imaginaires le conduisait directement à admettre que les démonstrations géométriques associées devaient s'étendre également dans les mêmes conditions [...] Le principe de continuité et l'intervention des imaginaires en géométrie qui, dans l'œuvre de Poncelet, tiennent une place centrale tirent en grande partie leur origine de l'œuvre et de la tradition orale de l'enseignement de Monge ; Carnot

1. Voir l'annexe 12 : Sur la notion de courbure.
2. Voir les introductions aux cours de Laplace et de Lagrange.

que cite Poncelet n'est certainement pas son seul inspirateur dans cette voie. Michel Chasles [1837, p. 199-207] l'a vu très nettement, car, dans l'étude très brillante et très documentée qu'il fait du principe de continuité, il le dénomme "méthode de Monge" et démontre d'ailleurs très clairement la filiation directe entre l'utilisation tacite faite par Monge et la prise de position catégorique de Poncelet » [Taton, 1951*a*, p. 269].

Autre apport fondamental de ce cours de géométrie descriptive, la mise en lumière de l'importance de la méthode des projections. Poncelet ne s'y trompe pas lorsqu'il déclare : « En réfléchissant attentivement à ce qui fait le principal avantage de la géométrie descriptive et de la méthode des coordonnées, à ce qui fait que ces branches des mathématiques offrent le caractère de véritable doctrine, dont les principes, peu nombreux, sont liés et enchaînés d'une manière nécessaire et par une marche uniforme, on ne tarde pas à reconnaître que cela tient uniquement à l'usage qu'elles font de la projection » [Poncelet, 1822, introd., p. 28].

Certes, comme pour le principe de continuité ou les éléments imaginaires, il n'existe, dans l'œuvre de Monge, aucune étude systématique de la notion de transformation. Mais, outre l'usage fondamental qui est fait de la projection pour passer de figures de l'espace à des figures planes, Monge donne des exemples inverses d'utilisation de la géométrie à trois dimensions pour résoudre des problèmes de géométrie plane, mettant en évidence la richesse d'un passage réciproque de l'une à l'autre. Brianchon, Coste, puis Poncelet [1] cultiveront avec succès cette méthode, qui est, selon Chasles, l'une des caractéristiques de « l'école de Monge ». Les deux exemples, donnés dans les leçons de l'École normale et illustrant cette méthode, sont d'une élégance remarquable. Le premier (p. 355-357, n° 39, *fig.* 18 à 20), conduit à la théorie des pôles et polaires ; le second (p. 358-361, n° 44, *fig.* 22) démontre que, trois cercles étant donnés, si l'on considère deux centres d'homothétie échangeant respectivement le premier et le second cercle et le second et le troisième cercle, l'un des centres d'homothétie échangeant le premier et le troisième cercle est aligné avec les deux centres d'homothétie considérés (Monge ne s'exprime pas en terme de « centre d'homothétie », mais de « point de concours de tangentes communes à deux cercles »).

Ces deux théorèmes de géométrie plane, démontrés par des considérations de géométrie à trois dimensions, prouvent que l'importance de la notion de transformation n'avait pas échappé à l'auteur. Chasles, systématisant ce principe, remarque que « chaque épure de descriptive peut exprimer un théorème de géométrie plane » [Chasles, 1837, p. 194]. Il en donne également deux exemples, d'une grande élégance et, en un sens, plus convaincants que ceux donnés par Monge. Ce dernier considère la figure plane comme la projection sur un plan d'une figure de l'espace. Aussi peut-on estimer que la géométrie descriptive n'intervient là que de façon indirecte. Chasles, au contraire, lit une figure de géométrie plane comme une véritable épure, mettant ainsi clairement en évidence la réciprocité du passage plan-espace, sur lequel il insiste, à juste titre, longuement. Il démontre ainsi, par exemple, le théorème suivant, généralisation du théorème de Desargues :

Si l'on a dans un plan deux triangles dont les côtés concourent deux à deux en trois points situés sur une même droite L, et que par un point, pris arbitrairement, on mène trois droites aux sommets du premier triangle ; qu'on les prolonge jusqu'à ce qu'elles rencontrent en trois points la droite L ; qu'on joigne ces trois points, respectivement, aux trois sommets du second triangle, par trois droites ; ces droites iront concourir en un même point.

Ces quelques exemples prouvent la richesse potentielle de la géométrie descriptive,en tant que théorie géométrique. Le cours de Monge contient, en germe, nombre d'idées qui seront reprises, développées et explicitées par ses successeurs. Précurseur direct de Poncelet, Monge se trouve ainsi à l'origine du profond bouleversement de la pensée mathématique qui allait apparaître durant la première moitié du XIX^e siècle. Il est toutefois surprenant que cette dimention « projective » de la géométrie descriptive, certainement la plus riche d'un point de vue géométrique, ait disparu presque immédiatement des manuels de la discipline, qui n'en ont retenu que le côté purement technique.

1. Voir [Brianchon, 1810] ; [Coste, 1817] ; [Poncelet, 1822].

Enseignement et applications de la géométrie descriptive

Il faut reconnaître que Monge lui-même, définissant la géométrie descriptive comme un « art », semblait plus soucieux du rôle technique et pédagogique qu'elle pouvait jouer que de son rôle scientifique. S'il ne considérait pas la géométrie descriptive comme une branche nouvelle de la géométrie, par contre il voulait en faire un outil privilégié pour la formation des ingénieurs et même, plus largement, « pour l'avancement de l'instruction générale de la nation » (cf. p. 305). Son projet pour les écoles centrales, présenté à la Convention en septembre 1793, (voir annexe 20) en fait foi, tout comme la place accordée à cette discipline à l'École centrale des travaux publics puis à l'École polytechnique [1]. Lieu privilégié de l'articulation entre une théorie et des pratiques, « langage universel » indispensable aux savants, aux artistes et aux ouvriers, la géométrie descriptive doit devenir la colonne vertébrale de l'enseignement secondaire et supérieur. Bien que ces projets pédagogiques ne se soient pas totalement réalisés, du moins l'enseignement de la géométrie descriptive se développe avec une extrême rapidité immédiatement après 1795. La simplicité de l'outil mis en place, son efficacité tant pratique que théorique, sa valeur didactique, la clarté du cours de Monge et la position institutionnelle de l'auteur (et de ses successeurs) contribuèrent à ce développement en France et à l'étranger.

L'influence de la géométrie descriptive ne se fait pas sentir uniquement dans le champ clos des mathématiques. Les techniques qui, historiquement, ont été à son origine, sont également les premiers domaines d'application : la stéréotomie (cf. annexe 15), l'astronomie [Hachette 1805*b*, et 1806], la gnomonique [Lefrançois, 1802] ou la technique des plans côtés, dont le premier exposé rigoureux et complet est dû à Noizet [1823, et 1831]. Mais la géométrie descriptive est également intimement liée au bouleversement technologique et au développement industriel de l'époque. Avec elle se développe le dessin d'exécution en architecture et la possibilité pour le maître d'œuvre de dominer, dès la conception, un objet architectural dans tous ses détails. Avec elle naît le dessin industriel et la fonction moderne d'ingénieur. L'exemple de l'usine du Creusot, rachetée par les frères Schneider en 1836, est de ce point de vue éloquent. Retraçant rapidement l'historique de cette entreprise industrielle, et les moyens mis en œuvre pour redresser une entreprise qui périclite, Yves Deforge conclut : « Ce qui est certain, c'est que le tout premier soin des deux frères est d'ouvrir au Creusot des cours où la géométrie descriptive et le dessin industriel tiennent une place importante... il est incontestable que la formation technique généralisée, et l'enseignement du dessin comme moyen de communication du haut en bas de la hiérarchie, a contribué à faire du Creusot... le premier grand « complexe industriel » existant » [Deforge, 1981, p. 115].

Cette influence est sûrement conforme à l'idée que se faisait Monge de la géométrie descriptive, puisqu'il déclare, à l'École normale, dans son programme liminaire, qu'elle devait contribuer à « tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère » (cf. p. 305). C'est dans cet esprit que s'inscrivent, par exemple, les œuvres de Dupin ou d'Olivier, qui souhaitèrent utiliser la géométrie descriptive comme un levier pour le développement industriel de la France. Dupin, dont le titre de son premier ouvrage — *Développements de géométrie pour faire suite à la « Géométrie descriptive » et à la « Géométrie analytique » de M. Monge...* — indique on ne peut plus explicitement la filiation, rédige un traité de *Géométrie et mécanique appliquées aux arts et métiers et aux beaux arts* qu'il dédie « aux ouvriers français ». Pour étendre les bienfaits d'un enseignement industriel analogue à celui qu'il avait fait créer au Conservatoire national des arts et métiers, il incite les polytechniciens à créer des cours de mécanique appliquée dans leurs villes de garnison. Celui de Poncelet à Metz en est l'exemple le plus célèbre. Quant à Olivier, déçu par la part croissante que les disciplines les plus théoriques avaient prise à l'École polytechnique sous l'influence de Laplace, il fonde en 1829 l'École centrale des arts et manufactures. En s'inspirant très largement de la première École polytechnique, il accorde à la géométrie descriptive, ainsi qu'à la mécanique, une place privilégiée.

1. La première année, 40 à 45 % du temps des élèves est consacré à la géométrie descriptive « au sens large », c'est-à-dire avec ses applications. Voir [Langins, 1987, p. 28].

4. *Le déclin*

Très rapidement, l'enseignement de la géométrie descriptive en France va être amputé, en amont, de toute sa partie « projective » et, en aval, de ses applications,pourtant essentielles aux yeux de Monge. « Le résultat est la géométrie descriptive des classes de Spéciales, aussi absurde en son genre que la théorie des abaques [...] Monge et Hachette pâliraient de colère, voyant ce qu'on a fait de leur science », écrit un inspecteur général [1] dans un rapport sur l'enseignement de la géométrie descriptive. Dès la seconde moitié du XIX[e] siècle, cette discipline ne conserve plus que son utilité technique. Les manuels les plus complets sur le sujet sont toujours ceux écrits à la fin du siècle dernier ou au début de celui-ci. Les cours de Pillet [1880] et Roubaudi [1916] demeurent les « classiques » de la discipline. En revanche, dans les manuels plus récents, on note de réels efforts d'adaptation à un public de non mathématiciens. Le livre de Imre Pal [1959] est le plus original de ce point de vue. Il utilise, comme support pédagogique, des figures en relief par les anaglyphes.

Peu à peu retirée des matières figurant au concours d'entrée aux grandes écoles, la géométrie descriptive ne subsiste plus que dans l'enseignement technique et dans celui de l'architecture. Le développement rapide du dessin assisté par ordinateur va-t-il supprimer ces derniers bastions ?

Si cette hypothèse n'est pas totalement exlue, elle nous semble fort dommageable. Ce langage reste indispensable entre le concepteur et le réalisateur et il importe que les deux parties le parlent et le maîtrisent. Il n'est pas certain que la multiplication des images, rendue possible par le dessin assisté par ordinateur autorise une moindre dextérité qu'auparavant. La simplification des formes et des volumes que l'on constate dans l'architecture moderne est-elle uniquement le résultat d'un choix esthétique et de contraintes économiques ? N'est-elle pas due également à une perte de savoir-faire des maîtres d'œuvre ?

La géométrie descriptive reste l'unique méthode que nous connaissons pour développer les facultés d'un individu à imaginer et concevoir formes et volumes dans l'espace. On ne peut concevoir ce que l'on ne peut représenter et décrire. Et dans ce rôle l'enseignement de la géométrie descriptive nous semble irremplaçable, à condition de savoir (et de pouvoir) redonner à cette discipline la richesse qui est la sienne et dont les leçons de Monge restent encore le meilleur exemple.

J.S.

1. H. Bouasse, cité dans [Deforge, 1981, p. 197-198].

Bibliographie générale

Abréviations

A.H.E.S.	*Archives for History of Exact Sciences.*
A.I.H.S.	*Archives Internationales d'Histoire des Sciences.*
C.E.P.	*Correspondance sur l'École Polytechnique.*
Cah. H.P.Sc.	*Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences.*
D.S.B.	*Dictionary of Scientific Biography.* Ch. C. Gillispie éd., 16 vol., New York, 1970-1980.
H.A.R.S.	*Histoire de l'Académie Royale des Sciences, pour l'année X, avec les mémoires...*, Paris, année Y.
H.M.	*Historia Mathematica.*
Hist. Ac. Berlin	*Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres (Berlin).*
J.E.P.	*Journal de l'École Polytechnique.*
Misc. Taurin.	*Miscellanea Taurinensia*
Nouv. M.Ac.Ber.	*Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres (Berlin), année X,* Berlin, année Y.
Phil. Trans.	*Philosophical Transactions.*
R.H.S.	*Revue d'Histoire des Sciences.*
Sav. Étrang.	*Mémoires de... présentés devant l'Académie royale des sciences par divers savants.*

Aclocque P.
1991, L'aberration stellaire, *Cah. H.P.Sc.*. n°35, Paris, Belin.

Aczél J., Dhombres J.
1989, *Functional equations in several variables*, Cambridge University Press, Historical notes, p. 345-378.

Adhémar J.-A.
1840, *Traité de la coupe des pierres*, Paris, Bachelier, 2e éd.

Alberti L.-B.
1536, *De Pictura*, 1ère éd. latine, Bâle, 1540 ; éd. critique par L. Malle, Florence, 1950.

Alembert J. d'
1748, Recherches sur le calcul intégral, *Hist. Ac. Berlin, 1746*, p. 182-224.