# LA TAILLE DES PIERRES ET LA GEOMETRIE DESCRIPTIVE

Joël SAKAROVITCH
UFR de Mathématiques, Université Paris V
Ecole d'Architecture Paris-Villemin

Dans sa déclaration liminaire aux leçons données, en 1795, à l'Ecole normale de l'an III, Monge définit ainsi la géométrie descriptive :

*"Cet art a deux objets principaux :*
*Le premier est de représenter avec exactitude, sur des dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois, et qui sont susceptibles de définition rigoureuse...*
*Le second... est de déduire de la description exacte des corps tout ce qui suit nécessairement de leurs formes et de leurs positions respectives. Dans ce sens, c'est un moyen de rechercher la vérité"*[1].

Cette discipline a donc un double objectif: la représentation, d'une part, la découverte des formes, d'autre part. Les techniques graphiques antérieures visaient l'un ou l'autre de ces deux objectifs, les atteignaient à peu près correctement, mais toujours séparément. En réalisant leur synthèse, Monge enrichit la géométrie d'une nouvelle branche et renouvelle l'intérêt pour les études géométriques quelque peu délaissées par les mathématiciens de l'époque.

Nous n'avons pas l'intention de présenter dans cet article une histoire de la géométrie descriptive qui participe à la fois de l'histoire des sciences, de l'histoire des techniques et de l'histoire de l'éducation[2]. La

---

[1] Monge (G), *Géométrie descriptive*, Programme p. XVI, Paris, 1820 (4è édition).

[2] Sur ce sujet voir:

gnomonique, ou technique de construction des cadrans solaires, la théorie des éclipses, la coupe des bois, sont autant de techniques ou de problèmes qui furent théorisés par la géométrie descriptive et trouvent leur place dans un panorama complet du sujet. De même, sur un plan plus théorique, la notion de repère cartésien et de coordonnées d'un point du plan ou de l'espace n'est pas sans rapport avec la méthode de la double projection. Au reste, Monge est également l'auteur du premier cours de géométrie analytique moderne[3].

Mais nous souhaitons montrer ici les liens spécifiques qui unissent la géométrie descriptive aux méthodes et aux traités de coupe des pierres, montrer que ceux-ci sont à la géométrie descriptive ce que les traités de perspective sont à la géométrie projective.

Rappelons brièvement, avant de présenter les méthodes de la coupe des pierres, les principes fondamentaux de la géométrie descriptive. Théorie géométrique sous-jacente à la représentation d'un objet tridimensionnel selon ses deux projections, elle suppose l'espace rapporté à deux plans orthogonaux entre eux. A tout point de l'espace, on associe ses deux projections orthogonales, sur chacun des deux plans de référence que l'on rabat ensuite l'un sur l'autre. Tout point de l'espace est ainsi représenté par un couple de points du plan, son "épure" (cf. fig.1). Cette première convention permet de représenter les courbes de l'espace et les corps polyédriques. Monge adjoint une seconde convention pour la représentation des surfaces qu'il définit en terme de directrices et de génératrices: «pour exprimer la forme et la position d'une surface courbe, il suffit, pour un point quelconque de cette surface, et dont une des projections peut être prise à volonté, de donner la manière de construire les projections horizontale et verticale de deux génératrices différentes qui passent par ce point»[4]. A ces deux conventions sont associées différentes opérations géométriques, "les méthodes de la géométrie

---

-Loria (G.), *Storia della geometria descrittiva delle origini, sino ai giorni nostri*, Milan, 1921.
-Taton (R),"L'Histoire de la géométrie descriptive", *Les Conférences du Palais de la Découverte*, Série D, n° 32, Paris, 1954.
-Taton (R.) et Belhoste (B.), "Monge et la géométrie descriptive", *l'Ecole normale de l'an III, Leçons de Mathématiques, Laplace, Lagrange, Monge*, J. Dhombres ed., à paraître chez Gauthier-Villars.

3 Monge (G), *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie à l'usage de l'Ecole polytechnique*, Paris, an III, réédité en 1811 sous le titre *Applications de l'analyse à la géométrie*.

4 Monge (G), *Géométrie descriptive*, p. 18.

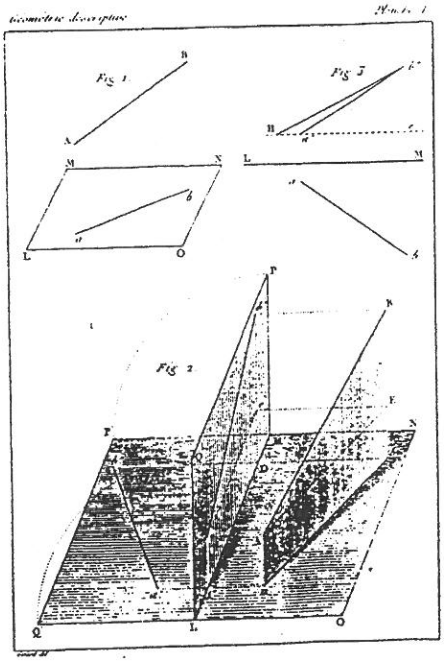


Fig. 1 - Le principe de la double projection: épure d'un segment de droite
Monge, *Géométrie descriptive*, planche I

descriptive": rotations, rabattements et changements de plan permettent de déterminer les vraies grandeurs de distances ou d'angles, la méthode des surfaces auxiliaires permet, elle, de construire les intersections de surfaces (cf. fig.2). C'est cet ensemble de conventions et de méthodes qui constitue les principes de base de la géométrie descriptive et c'est l'origine de cet *ensemble* de principes (et non de tel ou tel pris séparément) que nous souhaitons aborder ici.

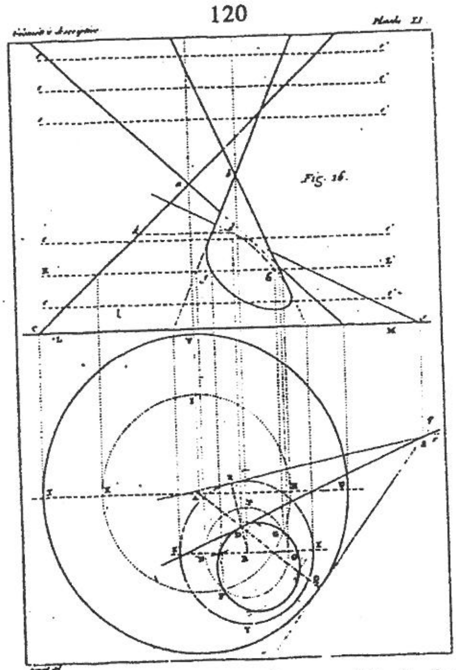



Fig. 2 - Epure de l'intersection de deux cônes : méthode des plans auxiliaires. Monge, Géométrie descriptive, planche XI.

## Les méthodes de la coupe des pierres

Les problèmes que pose la stéréotomie[5] vont en effet amener les appareilleurs à exploiter les richesses potentielles de la méthode de la double

---

[5] La stéréotomie est l'art de tracer les formes à donner aux pierres en vue de leur assemblage. Les éléments constitutifs des arcs et des voûtes, taillés en forme de coin, s'appellent les "claveaux" ou les "voussoirs". Ils possèdent un pan cintré (la douelle) qui reste visible et fait partie de la face inférieure curviligne de la voûte (intrados) et des "lits en coupe", pans obliques par lesquels un claveau s'appuie sur le claveau voisin. Les lits sont généralement des surfaces planes, mais pas nécessairement. Par exemple, dans une coupole sphérique les lits sont des portions de cône (*Vocabulaire de l'Architecture*, Ministère des Affaires culturelles, Imprimerie Nationale, Paris, 1972).

projection[6], à l'utiliser comme outil de découverte des formes et ainsi à effectuer un pas décisif vers la géométrie descriptive. Loin de toute théorie géométrique, c'est dans la confrontation avec des problèmes pratiques, complexes et spécifiques, que va s'élaborer de la façon la plus précise un mode d'appréhension, puis de représentation de l'espace et des formes. Pour mettre en évidence la manière dont la géométrie descriptive vient s'articuler sur les méthodes utilisées dans la coupe des pierres, nous commençons par présenter ces dernières.

*Taille par équarrissement et par panneau*

Il existe traditionnellement deux méthodes de coupe des pierres pour déterminer les voussoirs d'une voûte, l'une dite par équarrissement, l'autre par panneau. La première consiste à inscrire le voussoir, qui reste dans la position qu'il occupera après l'assemblage, dans un parallélépipède rectangle dont les parois sont horizontales ou verticales. Chaque sommet, ou n'importe quel point particulier, est ensuite repéré par sa projection sur deux faces orthogonales de l'enveloppe.

Prenons l'exemple d'un voussoir d'une porte droite plein cintre dans une tour ronde. L'appareilleur dispose du plan de la tour ronde et de l'élévation de la porte cintrée avec ses voussoirs (fig.3). Pour tailler le voussoir A, il l'inscrit dans un parallélépipède rectangle dont les faces sont horizontales ou verticales. Sur les faces horizontales et verticales il trace les portions du plan et de l'élévation correspondante. Le voussoir est ensuite taillé à partir de ces seuls tracés (fig.3-a). Il suffit en effet d'abattre la pierre de façon à former un cylindre dont les génératrices sont verticales et qui admet pour directrices les courbes tracées sur les plans horizontaux, d'une part, de former de façon analogue le cylindre aux génératrices horizontales, d'autre part, pour qu'à l'intersection des deux cylindres apparaisse le voussoir cherché, sans que l'on ait à en prédéterminer sa forme. Naturellement, au moment de la taille, il ne faut pas supprimer la projection du voussoir sur l'une des parois, par exemple verticale, en abattant d'un coup le cylindre à génératrices verticales. En pratique, on trace les projections sur les deux faces parallèles puis on taille par moitié (fig.3-a).

---

6 La représentation d'un objet en "double projection" suppose que les deux vues différentes de l'objet soient clairement mises en correspondance, ce qui permet d'effectuer ensuite les opérations géométriques que nous avons décrites ci-dessus; elle ne se réduit donc pas à deux projections distinctes d'un même objet.

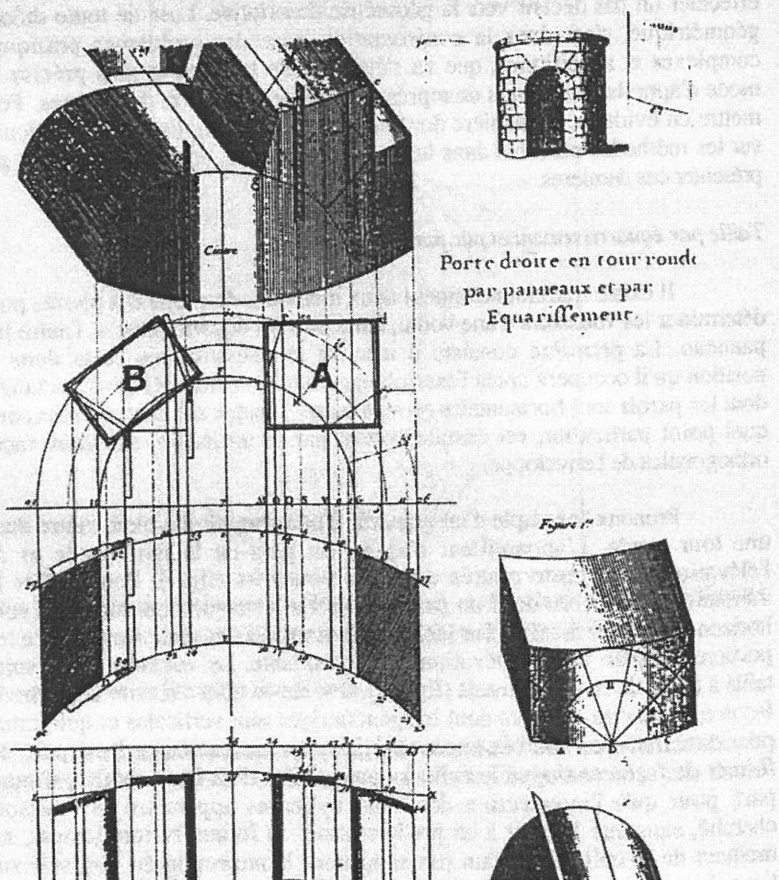
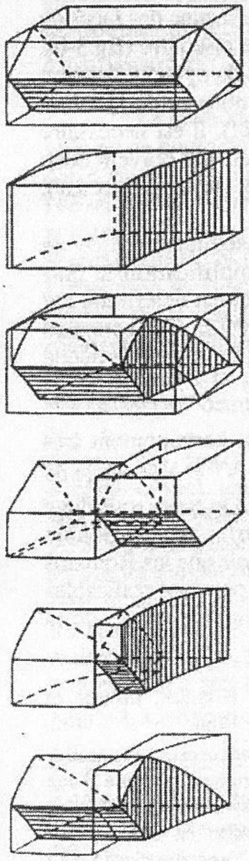



**Fig. 3 - Voussoir d'une porte droite dans une tour ronde taillée par équarrissement.**
**(D'après de la Rue, *Traité de coupe des pierres...*, Paris, 1728).**



On définit le cylindre à génératrices horizontales...

... celui à génératrices verticales...

...le voussoir est à l'intersection des deux cylindres

... il peut être obtenu directement...

...par la taille à partir des projections sur les faces du bloc de pierre initial sans avoir été prédéterminé géométriquement.

Fig. 3-a - Taille du voussoir A par équarrissement

Le voussoir est placé dans un parallélépipède minimal.

Il faut connaître la forme de chaque panneau pour achever la taille.

Il faut également repérer la position des génératrices du cylindre vertical.

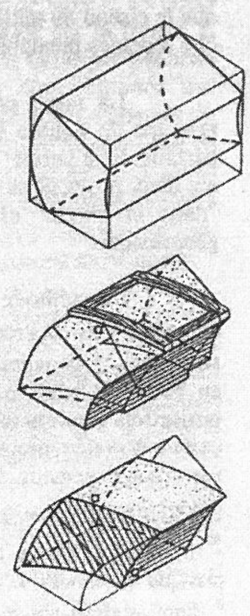


Fig. 3-b - Taille du voussoir B par panneau

Dans la méthode par panneau, au contraire, on cherche à placer le voussoir dans un parallélépipède rectangle minimal (fig.3, voussoir B) qui ne comporte plus qu'une seule direction de plan parallèle à l'un des référents. Après avoir tracé le panneau de face, donné par l'élévation, le tailleur dégage, à partir de lui, le cylindre à génératrices horizontales. Toute référence au repère plan-élévation étant alors perdue, il faut, pour achever le travail, avoir préalablement déterminé la forme géométrique exacte de chacune des faces du voussoir. Il faut même, plus précisément, dans l'exemple ci-contre (fig.3-b), repérer les points d'intersection des génératrices verticales du cylindre formant l'intérieur de la tour avec les différents panneaux. Au moment de la taille, pour obtenir une surface régulière (et conforme au projet), il est nécessaire que le ciseau du tailleur suive la direction des génératrices, qui doivent donc être repérées préalablement (par exemple sur la figure 3-b, par les points a,a').

La taille par équarrissement est donc intrinsèquement liée au principe de double projection. Elle en est même l'exemplification la plus parfaite. Elle permet de vérifier concrètement qu'un objet est déterminé par ses deux projections sur deux plans orthogonaux. En travaillant directement "dans la masse" elle est l'exacte traduction physique de ce procédé géométrique.

La méthode de la taille par équarrissement est certainement très ancienne. Certains monuments clavés syriens[7], datant du V$^{e}$ et VI$^{e}$ siècle de notre ère, ne peuvent avoir été réalisés par ravalement[8]. On trouverait donc au Proche-Orient une utilisation très ancienne du principe de double projection. Peut-on même inverser le raisonnement? On sait que les Romains évitaient systématiquement les pénétrations de berceaux, pourtant réalisables par équarrissement. Doit-on voir là la preuve que le principe même de la

---

7 G. Marguerites et J. Martin, Conférence au séminaire "Histoire, théorie et pratique des modes de représentation de l'espace", IHP. Paris, 1988.

8 Pour réaliser un ouvrage clavé, il n'est pas toujours nécessaire de tailler complètement les voussoirs avant de les mettre en place. Prenons l'exemple d'une voûte plein-cintre débouchant dans un mur en talus. Il est possible de tailler les voussoirs sans tenir compte du talus, de constituer la voûte en laissant les voussoirs faire saillie par rapport au nu du mur, et de "ravaler" ensuite, c'est à dire d'abattre la pierre en sus, les voussoirs étant déjà en place. Il est impossible, en général, de distinguer a posteriori si un ouvrage clavé a été ravalé ou exécuté selon "les règles de l'art". Par contre, il est évident que de nombreux ouvrages clavés (coupoles, trompes, pénétrations de voûtes,...) ne sont pas réalisables par ravalement.

double projection n'était pas en fait totalement maîtriser? Certes Vitruve utilise les termes "d'ichnographie" et "d'orthographie"[9] pour désigner les projections horizontale et verticale de l'objet à représenter, mais rien n'indique dans son traité, qui nous est parvenu sans figure, que la correspondance entre les deux vues ait été explicitement perçue. Et la distance nous semble plus grande entre l'utilisation de différentes projections d'un objet et le principe de la double projection, qu'entre la double projection et la taille par équarrissement[10].

La méthode par panneau permet un progrès pratique en diminuant le volume de pierre nécessaire et, en conséquence, le temps de taille et les coûts d'exécution. Par exemple, pour le voussoir A représenté sur la figure 1, l'économie en pierre est d'environ un tiers. En outre, la taille par panneau permet des réalisations nouvelles qui ne peuvent être obtenues par équarrissement. Nous avons très peu de documents permettant d'attester de l'utilisation de l'une ou l'autre des méthodes pendant tout le Moyen-Age en France. Il est vraisemblable que les deux méthodes de taille furent utilisées longtemps parallèlement ou concurremment. Les traités de taille des pierres du XVII^è^ siècle en portent encore la trace et proposent, pour certaines épures, des tailles par "demi-équarrissement", dénommant ainsi une méthode mixte.

La taille par panneau constitue, par rapport à celle par équarrissement, une première étape, essentielle, quoique difficile à dater et sûrement très étalée dans le temps, vers une théorisation du geste technique. Avec elle, on passe d'une réalisation du volume directement dans la masse à sa prédétermination géométrique préalable. Mais, pendant tout le Moyen Age, le savoir des tailleurs de pierres est gardé secret par la corporation dont les statuts, publiés à Ratisbonne en 1459, précise encore: "nul ouvrier, nul maître, nul parlier, nul journalier, n'enseignera à quiconque n'est pas de notre métier et n'a jamais fait travail de maçon comment tirer l'élévation du plan"[11]. Le document le plus ancien attestant d'un tracé de panneau, nous est

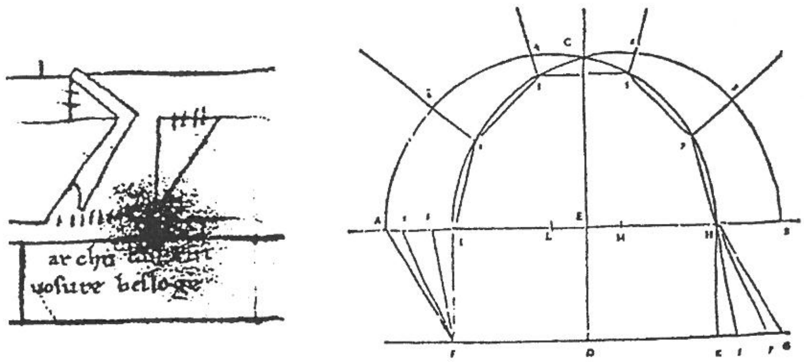
---

9 Vitruve,*Les dix livres d'architecture*, Livre I, chap. 2,(trad. Cl. Perrault, Paris, 1679), réed. Mardaga, Bruxelles, 1979.

10 Une technique tout à fait similaire à celle utilisée pour la taille par équarrissement peut permettre de réaliser les coffrages nécessaires, s'il s'agit d'architecture maçonnée (comme c'est en général le cas de l'architecture romaine) et non clavée.

11 Une traduction française des statuts de Ratisbonne a été publiées dans *Artisans et ouvriers d'Alsace*, Strasbourg, 1965 p.97-119.

fourni par le *Carnet* de Villard de Honnecourt[12] dont l'un des croquis se révèle être une "épure" de stéréotomie[13](cf. fig. 4).



— CROQUIS 39 I
DU MANUSCRIT DE VILLARD

PLANCHE EXTRAITE DE L'OUVRAGE DE JOUSSE

Fig. 4 - Villard de Honnecourt. Croquis pour le tracé du biais passé des anciens (C. Lalbat, G. Marguerite, J. Martin, "De la stéréotomie médiévale, La coupe des pierres chez Villard de Honnecourt" Bulletin Monumental, T. 145, IV, 1987).

---

12 Villard de Honnecourt, *Carnet*, Introduction de A. Erlande-Brandenburg, R. Pernoud, J. Gimpel, R. Bechmann, Stock, Paris, 1986.

13 Voir C. Lalbat, G. Marguerite, J. Martin, "De la stéréotomie médiévale, La coupe des pierres chez Villard de Honnecourt", *Bulletin Monumental*, T. 145, IV, 1987

*Les traités de taille des pierres*

Le premier traité de taille des pierres est publié par Philibert de l'Orme en 1567[14]. Avec les traités, la méthode par panneau s'impose définitivement. Les tracés donnés par Philibert de l'Orme étaient sans doute déjà connus des appareilleurs. Mais en exposant pour la première fois les procédés géométriques nécessaires pour déterminer la vraie grandeur des panneaux des voussoirs, ce traité ouvre le second moment dans la longue histoire de la théorisation des pratiques de taille. Ce premier traité de stéréotomie est conçu comme un catalogue de cas auquel le praticien peut se référer. Les démonstrations données dans les textes d'accompagnement restent confuses et comportent même de nombreuses erreurs. Les planches de dessins, très schématiques, ne sont sans doute pas éloignées des croquis sommaires que l'on mettait par écrit, avant lui, pour faciliter la transmission orale de la tradition.

Le traité de Philibert de l'Orme reste le seul ouvrage imprimé de stéréotomie jusqu'à la publication, en 1640, par le mathématicien et architecte Girard Desargues (1591, 1661), d'un opuscule de huit pages[15] (quatre de texte et quatre de dessin).Avec un net souci de géométrisation, Desargues étudie dans ces quelques feuillets un unique objet architectural, qui regroupe un certain nombre de difficultés stéréotomiques. Mais en choisissant un repère qui est intrinsèquement lié à l'objet étudié, donc indépendant de la pesanteur, Desargues s'interdit toute possibilité de généralisation et rend ses constructions géométriques, pourtant très habiles, beaucoup plus difficiles à suivre. D'esprit novateur et de lecture ardu, utilisant un vocabulaire inhabituel, le texte de Desargues n'est pas compris des professionnels auxquels il s'adresse[16].

---

14 L'Orme (Ph. de), *Le premier tome de l'architecture*, Paris, 1567. Réédité dans les *Traités d'architecture*, présentation par J. M. Perouse de Montclos, L. Laget, Paris, 1988.

15 Desargues (G.), *Brouillon-project d'exemple d'une manière universelle du S.G.D.L. touchant la practique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'Architecture...*, Paris, 1640.

16 Sur ce sujet voir J. Sakarovitch, " le traité de coupe des pierres de Girard Desargues", dans *Destin de l'art, desseins de la science, actes du colloque ADERHEM de Caen d'octobre 1986*, Caen 1991, p. 129-140. Voir également les *Œuvres complètes de Girard Desargues*, J.P. Le Goff et R. Taton ed.,à paraître et les actes du colloque *Desargues en son temps*, à paraître.

A partir de Desargues se développe une double tradition, celle des praticiens et celle des théoriciens.

Du côté des praticiens, on trouve par exemple le traité de Mathurin Jousse (1607-1650), *Le Secret d'architecture découvrant fidèlement les traits géométriques*, publié en 1642. Conçu pour aider les tailleurs de pierres, c'est un recueil de planches portant en vis-à-vis des explications plus techniques que géométriques. Il constitue le premier traité complet sur le sujet. L'année suivante, François Derand (1588-1644), architecte et mathématicien, publie son *Architecture des voûtes ou l'art des traits et coupe des voûtes....* Par une utilisation habile de la projection orthogonale, des rabattements et développements, qui lui permettent de déterminer en vraie grandeur des intersections de surfaces, il présente un ouvrage beaucoup plus lisible et des épures plus faciles à comprendre. Mais son traité, qui connut un grand succès, continue de délivrer un ensemble de "recettes". Bosse, également en 1643, dans *La pratique du trait à preuves de Monsieur Desargues* ... ne fait que reprendre la méthode de Desargues; en multipliant les exemples sur de nombreux cas particuliers, il en atténue le caractère général et théorique qui en faisait pourtant tout l'intérêt. *Le Traité de coupe de pierres* ... de Jean-Baptiste De La Rue, publié en 1728, reste très proche de celui de Derand, dont il s'inspire directement. Il présente néanmoins des planches d'une plus grande clarté, très bien gravées et illustrées de représentations axonométriques. Monge l'utilisa d'ailleurs dans ses cours de stéréotomie à l'Ecole du Génie de Mézières et dans les cours d'applications de la géométrie descriptive à l'Ecole polytechnique.

Du côté des théoriciens, citons François Blondel (1618-1686) et Philippe de La Hire (1640-1718) qui enseignent la stéréotomie à l'Académie d'Architecture mais ne publient pas de traité. L'ingénieur militaire Amédée-François Frézier (1682-1773), servi par de solides connaissances techniques et théoriques, présente, dans son important *Traité de stéréotomie à l'usage des architectes* un ouvrage d'un esprit radicalement différent. Insistant sur l'importance de la théorie, il consacre le premier des trois tomes de son traité à l'étude des surfaces (essentiellement le cône, le cylindre et la sphère) et de leurs intersections par un plan ou entre elles. Fort de cette armature théorique, il propose plusieurs solutions originales de tracé qui montrent une plus grande maîtrise des problèmes à la fois statiques et géométriques, intervenant dans les ouvrages clavés. Les "explications démonstratives" qui suivent le texte d'accompagnement de chaque épure prouvent également le souci de l'auteur de dépasser le stade de la simple transmission d'un savoir pratique. Malgré les tracés inutilement complexes de certaines épures, Frézier parvient, dans cet ouvrage de plus de 1500 pages, d'une grande rigueur, systématique et progressif, à poser les principes essentiels de la géométrie descriptive. Il apparaît ainsi comme l'un des précurseurs directs de Monge.

## L'origine de la géométrie descriptive

*Monge à l'Ecole royal du génie de Mézières*

Monge rentre à l'Ecole du génie de Mézières en 1764, à l'age de 18 ans. Le commandant en second de l'Ecole, de passage à Beaune, ville natale de Monge, avait apprécié le plan de la ville que Monge avait dressé après en avoir effectué un relevé. Il engage Monge à venir travailler dans l'atelier de dessin, de coupe des pierres et de moulage de l'Ecole, en tant que "collaborateur technique" en quelque sorte. D'après Dupin, déjà conscient de sa valeur, il se satisfaisait très mal d'être confiné à un travail purement manuel ou graphique. Mais bientôt remarqué pour ses dispositions particulières, il devient, deux ans après son entrée à l'école de Mézières, répétiteur, puis remplaçant du professeur de mathématiques, l'abbé Bossut. En 1770 il remplace l'abbé Nollet, et enseigne également la physique, mais ce n'est qu'en 1775 qu'il obtient le titre de "Professeur royal de mathématiques et de physique".

A partir de son élection comme correspondant de l'abbé Bossut à l'Académie des Sciences, en 1772, il participe aux séances de l'Académie et entre en relation avec Condorcet, Lavoisier, Vandermonde... Entre 1771 et 1780 il présente lui-même à l'Académie huit mémoires, cinq d'analyse (essentiellement sur les équations aux dérivées partielles), et trois de géométrie différentielle. Elu en 1780 "associé géomètre" à l'Académie, Monge partage son temps, à partir de cette date entre Paris et Mézières. En 1783 il devient "examinateur des gardes du pavillon, gardes de la marine et aspirants" et, à ce titre voyage beaucoup. En 1784, il quitte l'Ecole de Mézières et se fixe à Paris. Il s'intéresse alors plus à la physique et à la chimie qu'aux mathématiques et participe activement aux travaux des chimistes groupés autour de Lavoisier.

Sous la Révolution, Monge participe à la création de l'Ecole normale de l'an III et de l'Ecole polytechnique (qui porte le nom, la première année, d'Ecole centrale des travaux publiques) et y enseigne, en 1795, de façon quasi-concomitante, la géométrie descriptive[17]. Les *Séances de l'Ecole normale, recueillies par des sténographes et relues par les professeurs*, publiées cette même année, contiennent donc la première édition d'un cours de géométrie descriptive[18]. Publié sous forme d'ouvrage séparé par Hachette, successeur de Monge pour l'enseignement de la géométrie descriptive à l'Ecole polytechnique, en 1799, il fut republié de nombreuse fois depuis[19].

A l'Ecole du génie de Mézières, Monge n'enseigne pas encore la géométrie descriptive en tant que telle -du moins nous n'en avons pas de trace- et l'expression même de "géométrie descriptive" n'existe pas. Elle apparaît pour la première fois, sous la plume de Monge, en 1793, dans un texte où il présente un projet d'organisation pour les écoles secondaires du département de la Seine[20]. L'acte de naissance institutionnel de cette discipline est donc très étroitement lié aux projets pédagogiques que Monge élabore sous la Révolution. Mais sa conception même date surement de la période où Monge enseigne à Mézières et c'est sur cette étape que nous voudrions revenir

---

17 Sur la vie de Monge voir:

-Taton (R.), *L'Œuvre scientifique de Monge*, P.U.F., Paris, 1951.

-Belhoste (B.) et Taton (R), "Monge et la géométrie descriptive", dans *l'Ecole normale de l'an III, Leçons de Mathématiques, Laplace, Lagrange, Monge*, J. Dhombres ed, à paraître chez Gauthier-Villars.

18 Sylvestre-François Lacroix, ancien élève de Monge et adjoint auprès de ce dernier pour l'enseignement de la géométrie descriptive à l'Ecole normale, publia en 1795 ses *Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes (ou Eléments de Géométrie descriptive)*. Le cours de Monge ayant été publié avec les autres leçons données à L'Ecole normale, le livre de Lacroix est le premier manuel de géométrie descriptive. Sur ce sujet, voir Belhoste (B.), "Lacroix et la géométrie descriptive", Annexe 18 dans *l'Ecole normale de l'an III, Leçons de Mathématiques, Laplace, Lagrange, Monge*, J. Dhombres ed., à paraître chez Gauthier-Villars.

19 Une dernière réédition est en cours d'impression dans *l'Ecole normale de l'an III, Leçons de Mathématiques, Laplace, Lagrange, Monge*, J. Dhombres ed., à paraître chez Gauthier-Villars.

20 Ce texte, manuscrit inédit retrouvé par R. Taton dans les archives d'un des descendants de Monge, sera publié en annexe dans *l'Ecole normale de l'an III*,..Op. cit.,Annexe 20.

*Un transfert de technologie*

Le premier élément, fondamental, dans l'expérience de Monge à Mézières, est bien sûr son entrée à "la gâche". Chargé de préparer les dessins et les modèles pour les cours de taille des pierres des élèves officiers, on imagine facilement que Monge eût tôt fait de se familiariser avec les méthodes de cette technique, de les maîtriser et de les apprécier à leur juste valeur. Aussi l'étape clé permettant une conceptualisation des techniques graphiques nous semble être l'usage par Monge des méthodes de la taille des pierres dans d'autres domaines pratiques ou théoriques.

Le premier exemple est donné par le problème du "défilement"[21]. Ce problème consiste à déterminer position et hauteur des parapets que l'on doit construire pour protéger (ou "défiler") un endroit donné des tirs de canon qu'un ennemi serait susceptible d'effectuer. La portée des canons étant supposée connue (environ 1400 m. à l'époque), la hauteur du parapet à construire est naturellement fonction de la topographie des lieux et de la présence de hauteurs éventuelles dont pourrait bénéficier l'ennemi. Pour résoudre le problème il faut déterminer le plan, dit "de site", tangent au terrain (en pratique à un secteur du terrain) et passant par le point que l'on veut défiler; ce plan permet de ramener le problème considéré au cas d'un terrain plat (cf fig. 5).

Monge propose une solution, purement géométrique beaucoup plus rapide que les solutions antérieures, empiriques ou nécessitant de longs et fastidieux calculs[22]. J.B. Meusnier (1754-1793), sans doute le plus brillant élève de Monge à l'Ecole de Mézières, rédige en 1777 un mémoire sur ce sujet, où il expose la méthode de Monge[23], qui fait intervenir surfaces annexes et plans auxiliaires. Meusnier écrit: "Nous ne nous sommes point appesantis sur les détails (des méthodes géométriques), nos lecteurs...y suppléeront aisément en se rappelant qu'ils ont fait souvent usage des mêmes principes dans plusieurs épures de la coupe des pierres".

---

21 Sur ce sujet voir Belhoste (B.), "Le problème du défilement", Annexe 16 dans *l'Ecole normale de l'an III*..Op. cit..

22 Ce problème fut souvent présenté, à la suite de Dupin, comme une des sources directes de la géométrie descriptive.

23 Meusnier (J.B.), *Mémoire sur la détermination du plan de site*, Archives du génie, art. 18, sect. 3, carton n° 2.

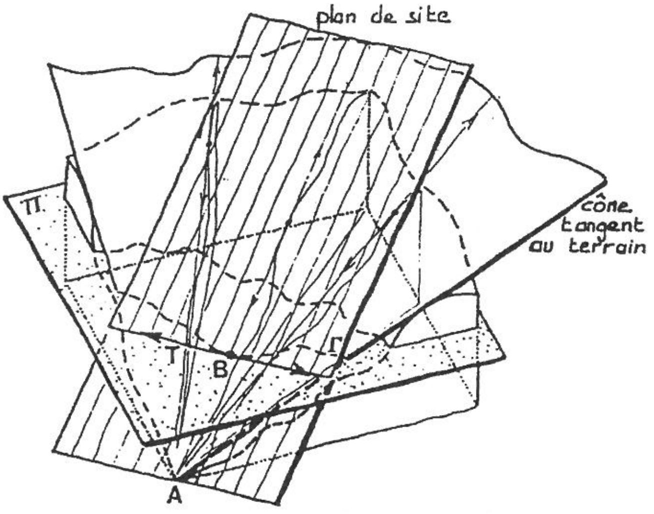



Fig. 5 - Détermination du plan de défilement passant par A
La méthode de Monge consiste à considérer la surface conique, dont le sommet est le point A que l'on veut défiler et s'appuyant sur la ligne d'horizon vue de A . Tout plan tangent supérieurement à cette surface est tangent supérieurement au terrain et constitue un plan de site. Pour construire un tel plan il faut, dans un premier temps, déterminer les génératrices de la surface conique, en utilisant des plans verticaux auxiliaires passant par le point A. La section du terrain par un tel plan détermine une courbe et la tangente issue de A à cette courbe est une génératrice du cône. Dans un deuxième temps on considère un plan P quelconque ne passant pas par A , à la projection de A sur $\Pi$ et G l'intersection de $\pi$ avec le cône. Il suffit de choisir un point B quelconque de G tel que G et a se trouvent de part et d'autre de la tangente T en B à G. Le point A définit avec T un plan de site.

Un deuxième exemple est donné par les deux petits traités, *De la perspective* et *Des ombres*[24], que Monge écrivit vers 1768 (ce qui montre qu'il devait également enseigner à Mézières le dessin de représentation). Le traité sur la perspective expose (bien entendu) la méthode pour construire la perspective d'un objet à partir de sa double projection. La première figure est d'ailleurs d'une ressemblance frappante avec la perspective du cube donnée par Dürer[25]. Dans le traité *Des ombres* apparaissent les méthodes de base de la géométrie descriptive. Après quelques réflexions générales sur les notions d'ombre, de pénombre et la dégradation des teintes, Monge expose le problème général de la détermination de la construction géométrique des ombres. "On construira, écrit-il, les projections d'un corps opaque, qui doit causer l'ombre, et de la surface qui doit la recevoir, sur deux plans quelconques, qu'il est cependant plus commun de supposer perpendiculaires l'un à l'autre et tels que l'un soit horizontal et l'autre vertical". Trente ans plus tard, Monge débutera son cours à l'Ecole normale par une réflexion similaire, marquant nettement la différence entre un point de vue théorique qui ne nécessite rien d'autre que deux plans distincts et "l'usage des artistes", où les raisons de "commodité" imposent un plan horizontal et un plan vertical. Lorsqu'il expose la construction de la séparatrice d'ombre propre d'un corps, Monge évoque "les règles de la stéréotomie", désignant ainsi l'usage de la double projection et de plans auxiliaires.

Un dernier exemple de référence explicite aux "méthodes de la coupe des pierres" se trouve dans un mémoire présenté à l'Académie[26] par Charles Tinseau d'Amondans de Gennes (1749-1822), qui fut également élève de Monge à Mézières de 1769 à 1771. Dans ce mémoire, portant sur les propriétés géométriques des solides inscrits dans des surfaces réglées,

---

24 Monge (G), *De la perspective* et *Des ombres*, Archives du génie, art. 21, section 13, carton 1. Ces deux traités ont été publiés, d'après des copies postérieures, par T.Olivier dans *Applications de la géométrie descriptive aux ombres, à la perspective, à la gnomonique et aux engrenages*, Paris, 1847, pp. 26-35 et 161-165.

25 Dürer (A.),*Underweysung du Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien ebenen und gantzen Corporen...*, Nuremberg, 1525, éd. Latine, Paris, 1532, etc. (Instructions sur la mesure au compas et à l'équerre, en lignes, en surfaces et en corps solides rédigées pour leurs amateurs par Albert Dürer avec les gravures nécessaires).

26 Tinseau (C.), "Sur quelques propriétés des solides renfermés par des surfaces composées de lignes droites", *Mem. div. sav.*, t. IX, 1780, pp. 625-642.

l'influence de Monge est très nette et Tinseau lui rend d'ailleurs explicitement hommage. De façon incidente[27], Tinseau détermine la perpendiculaire commune à deux droites ainsi que leur distance, et donne par là même, la première épure de géométrie descriptive qui nous soit parvenue[28]. Le texte explicatif pâtit à la fois d'une absence d'un énoncé clair des principes de base de la géométrie descriptive et de notations très maladroites. Mais la méthode elle-même n'est pas sans élégance et l'épure est d'une grande clarté. Avant de la tracer, Tinseau, précise qu'il "va donner la construction de ce problème par une méthode usitée dans la coupe des pierres et qui, par son utilité, mériterait d'être plus connue".

Ce texte donne une idée de ce que pouvaient être les enseignements de Monge à Mézières. Il montre que, dès les années 1770, les méthodes de la géométrie descriptive y étaient enseignées et utilisées, non seulement pour les applications pratiques, mais également pour la résolution des problèmes géométriques.

A l'Ecole de Mézières "les méthodes de la coupe des pierres" désignent donc l'ensemble des méthodes géométriques constituées par la double projection et les méthodes de changement de plan, rabattement et utilisation de plans auxiliaires. En un mot cette expression désigne ce que l'on appelle aujourd'hui "les méthodes de la géométrie descriptive". Cette synonymie nous semble être la meilleure preuve du fait que les traités et les méthodes des appareilleurs doivent être considérer comme la source directe de la géométrie descriptive.

Est-ce Monge qui eut, le premier, l'idée de ce "transfert" de technologie, ce n'est pas certain. Un an avant l'arrivée de Monge à Mézières, Nicolas-François-Antoine de Chastillon (1699-1765), fondateur et directeur de l'Ecole de Mézières, rédige un traité sur le tracé des ombres fort intéressant de ce point de vue[29]. Certes Chastillon n'utilise pas une expression explicite

---

27 Ibid., §18, pp. 635-638.

28 Sur ce sujet, voir J. Sakarovitch, "Sur la distance de deux droites", Annexe 14 dans *l'Ecole normale de l'an III*...Op.cit..

29 Chastillon (N.F.A. de), *Traité des ombres dans le dessin géométral*, Archives de l'Inspection du Génie, art. 21, sect. 13, carton n° 1 et act. 18, sect. 3, carton n° 3. Ce texte a été publié par T. Olivier dans *Applications de la géométrie descriptive aux ombres, à la perspective, à la gnomonique et aux engrenages*, Paris, 1847, pp.5-26. Sur ce sujet voir B. Belhoste, "Du dessin d'ingénieur à la

comme celle de Meusnier et de Tinseau. Mais il donne "des pratiques puisées dans la géométrie, commodes et expéditives", pour tracer les ombres et cite plusieurs fois en modèle les cours de coupe des pierres et des bois. Que Monge n'ait pas eu seul, ni même forcément le premier, l'idée d'un usage de ces procédés géométriques pour d'autres techniques graphiques est très vraisemblable. D'ailleurs, Hachette, dans la préface de son traité de géométrie descriptive de 1822, déclare que "c'est aux chefs, aux professeurs [de l'école de Mézières] qu'appartient véritablement l'honneur d'avoir amené la science des projections au degré de perfection où elle se trouvait en 1794". S'il met ensuite, bien évidemment, en valeur le rôle spécifique de Monge, il associe, dans la genèse de la géométrie descriptive, assez largement les enseignements de l'école de Mézières, et nomme explicitement Chastillon.

*Découverte des formes*

Mais la géométrie descriptive ne se contente pas d'expliciter et de généraliser des techniques graphiques mises en œuvre dans les traités. Elle parvient également à théoriser et à transférer d'une pratique vers une construction abstraite, l'étape essentielle qui permet la découverte de nouveaux volumes, de "formes inconnues, qui résultent nécessairement des formes primitives données"[30]. Dans ce rôle, l'analogie avec la méthode de taille par équarrissement que nous avons décrite précédemment, est totale. De même que lors de la taille apparaît un volume qui n'a pas été déterminé préalablement, de même, au moment du tracé de l'épure, on "construit", on détermine le volume cherché. La géométrie descriptive permet, en effet, de progresser pas à pas dans cette recherche, à l'aide de quelques principes simples, de deux algorithmes propres, selon Dupin , ceux de projection et de rabattement. La force de la géométrie descriptive dans cette activité de recherche, vient de ces moyens algorithmiques et systématiques qui permettent d'avancer de façon sûre et progressive.

Il n'est pas nécessaire de "voir" l'objet dans l'espace avant d'en faire l'épure ; grâce à la géométrie descriptive on peut découvrir une forme que l'on n'arrivait pas à imaginer. La géométrie descriptive permet de représenter sur un plan des objets tridimensionnels, mais pour ceux dont les formes sont

---

géométrie descriptive. L'enseignement de Chastillon à l'Ecole royal du génie de Mézières", *In Extenso* n° 13, Juil. 1990, pp. 103-135.

30 Hachette, *Traité de géométrie descriptive...*, Paris, 1822, p. XI

simples, elle reste un moyen très abstrait et difficile à saisir, par rapport, par exemple, à une axonométrie. Elle ne devient irremplaçable qu'à partir du moment où l'on doit représenter un objet complexe qui ne peut pas être imaginé d'une manière immédiate, comme par exemple l'intersection de deux surfaces plus ou moins complexes. Sauf à avoir une grande expérience (qu'il faut bien acquérir d'une façon ou d'une autre), on ne connaît pas, à priori, la forme des voussoirs constitutifs d'une baie plein-cintre d'axe quelconque dans une tour cylindrique ou conique. Pourtant si la tour et l'intrados de la baie sont tous deux bien définis, les voussoirs le sont également. Le problème est de les représenter sur la feuille de papier sans se les être au préalable "représentés" mentalement précédemment. C'est cette étape que la géométrie descriptive permet de franchir.

Enfin la géométrie descriptive, comme la géométrie différentielle de Monge, emprunte à la taille des pierres sa définition des surfaces, ou plus exactement donne une définition théorique de la notion de surface qui dérive directement de la manière dont celles-ci sont obtenues par le tailleur de pierres. Dans la pratique, les voussoirs sont toujours délimités par des surfaces réglées. Le tailleur de pierres note, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, la position des génératrices qu'il suivra avec son ciseau, position repérée sur deux directrices tracées sur deux faces d'un voussoir. Monge reprend cette définition des surfaces et ne les représente que par deux courbes, une directrice et une génératrice, précisant, si besoin est, la loi d'évolution de la génératrice lors de son déplacement le long de la directrice. Ce mode de représentation des surfaces, que Monge introduit lors de son cours à l'Ecole normale, nous semble directement inspiré des pratiques de taille.

La géométrie descriptive devient une méthode graphique universelle, applicable à toutes les techniques particulières, parce qu'elle théorise les deux phases essentielles: découverte (des formes) - représentation (des surfaces). Elle permet ainsi de progresser dans la résolution d'un problème pratique (tracé des ombres, gnomonique, défilement,...) par un va et vient entre ces deux pôles. Or, méthodes graphiques de détermination des vraies grandeurs, algorithme de découverte des formes et mode de définition et de représentation des surfaces, qui caractérisent la géométrie descriptive, sont tous trois directement issus des méthodes et des traités des appareilleurs.

*Une nouvelle branche des mathématiques*

Mais dans les cours de Monge à l'Ecole normale et à l'Ecole polytechnique, la géométrie descriptive cesse d'être uniquement une technique graphique de représentation de l'espace pour devenir un chapitre à part entière de la géométrie. Monge ouvre en effet deux voies qui devaient s'avérer extrêmement féconde: la première consiste à utiliser la géométrie descriptive comme un outil de passage *réciproque* entre l'espace et le plan. La seconde concerne les rapports entre la géométrie descriptive et l'analyse. Nous ne reviendrons pas en détail sur ces points qui ont été étudiés par ailleurs[31]. Signalons simplement que Monge donne dans son cours deux exemples d'utilisation de la géométrie descriptive pour la résolution de problèmes de géométrie plane. Chasles, qui considère que "l'alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes" est l'une des caractéristiques de "l'école de Monge" remarque même que "chaque épure de géométrie descriptive peut exprimer un théorème de géométrie plane"[32].

Enfin, la géométrie descriptive permet de porter l'intuition géométrique à des problèmes d'analyse. Le premier exemple en est donné par les mémoires de Monge présentés à l'Académie en 1771 et 1775. Le mémoire de 1771, sur les développés des courbes à double courbure, "met déjà en évidence tous les avantages du mode de présentation adopté par Monge ; servi par l'éminente sûreté de son pouvoir de représentation de l'espace, avec de simples images conçues dans son esprit, Monge opère aussi aisément qu'un autre géomètre qui utiliserait des figures tracées sur le plan"[33]. Le deuxième mémoire porte sur les surfaces développables et la théorie des ombres, et Monge y donne "la solution de plusieurs problèmes d'analyse, qu'on aurait peut-être beaucoup de peine à résoudre, sans les considérations

---

31 Voir:
-Taton (R.), *L'Œuvre scientifique de Monge*, P.U.F., Paris, 1951.
- Sakarovitch (J), "Géométrie descriptive et géométrie projective", *La Naissance du projectif, Actes du Colloque de Lille*, à paraître dans *Sciences et Techniques en perspective*.

32 Chasles (M.), *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie...*, Bruxelles, 1837, p.191 et 194.

33 Commentaire de N. Kommerell, cité par R. Taton dans *L'Œuvre scientifique de Monge*, p. 175.

géométriques"[34]. Monge aurait pu en fait écrire, "sans les considérations de géométrie descriptive", s'il avait déjà à cette époque forgé le terme.

Monge revient à plusieurs reprises, dans ses leçons de géométrie descriptive, sur les liens profonds qui existent entre cette discipline et l'analyse. A l'Ecole polytechnique, où il enseigne également la géométrie analytique, il articule les deux cours l'un sur l'autre et traite les mêmes questions parallèlement (du moins dans la première partie du cours). Ce faisant, Monge renverse les rôles: non seulement la géométrie descriptive conceptualise des pratiques anciennes, mais encore elle concrétise les domaines les plus abstraits des mathématiques (de l'époque), l'analyse. Toute surface devient représentable et avec elles les notions de surfaces développables, de courbes à double courbure, de tangentes, de plans tangents, de lignes de courbure, etc... Même si les outils analytiques restent un incomparable moyen de définition et d'étude de ces notions et de démonstrations de propriétés, leur visualisation permet de mieux les appréhender.

Directement issue d'une géométrie pratique, celle utilisée par les appareilleurs, la géométrie descriptive occupe une place charnière entre savoir pratique et savoir savant qui permet de comprendre l'importance que Monge réservait à cette discipline dans ses projets pédagogiques. Malheureusement, elle se trouva très vite coupée, dans l'enseignement supérieur français, à la fois de ses applications pratiques à travers lesquelles elles se comprend réellement et de ses développements projectifs qui lui donnent son charme (et son intérêt mathématique). Elle perdit de ce fait bien vite l'attrait du cours fondateur de Monge.

---

34 Monge, "Mémoire sur les propriétés de plusieurs genre de surfaces courbes...", *Mem. div. sav.*, t. IX, 1780, (présenté à l'Académie en 1775), p. 383.