Stéréotomie et géométrie

Joël Sakarovitch

Nous voudrions présenter ici un exemple où une branche des mathématiques, et plus précisément une branche de la géométrie, nous semble dialoguer avec un art, l'architecture – et plus précisément l'architecture clavée[45] – en ce sens que de leurs échanges réciproques naissent à la fois l'émotion artistique et une théorie géométrique.

> On le sait de quelques cathédrales, d'abbayes cisterciennes, de collines grecques à demi dénuées de leurs pierres, du meilleur de la Rome baroque, d'une arrivée en train à Venise : l'architecture, lorsqu'elle atteint au sommet de son expression, suscite un type de frisson très particulier, une froide béatitude qui s'installe soudainement, et dans laquelle la conscience d'un savoir technique suprêmement formulé, donc immensément mystérieux, semble entrer en conflit avec une sorte de certitude voluptueuse, une tranquillité d'ordre mystique...

écrivait F. Edelmann en introduction à un article consacré à Louis Kahn[46]. Mais Edelmann aurait pu, semble-t-il, ajouter à sa liste volontairement restrictive mais extrêmement bien ciblée, ces quelques chefs d'œuvres de l'architecture clavée où le conflit (entre un savoir technique et une tranquillité d'ordre mystique) confère cette qualité architecturale et explique que stéréotomie et géométrie entretiennent des relations profondes et réciproques.

Profondes, car pour l'architecture clavée ce sont les épures des appareilleurs qui sont à la base de ce "savoir technique suprêmement formulé et mystérieux" qui lui confère son esthétique. Réciproques, puisque non seulement une branche de la géométrie – la géométrie descriptive – est directement issue des tracés des appareilleurs, mais que, de plus, Gaspard Monge ayant constitué cette discipline mathématique, propose en retour une théorie de l'appareillage. Or, cette réciprocité est tout à fait exceptionnelle lorsqu'une théorie

45. "L'architecture clavée concerne les édifices, ou les portions d'édifice, réalisés à l'aide de "claveaux" ou de "voussoirs", qui sont les éléments constitutifs des arcs et des voûtes, taillés en forme de coin. Ils possèdent un pan cintré (la douelle) qui reste visible et fait partie de la face inférieure curviligne de la voûte (intrados) et des "lits en coupe", pans obliques par lesquels un claveau s'appuie sur le claveau voisin. Les lits sont généralement des surfaces planes, mais pas nécessairement. Par exemple, dans une coupole sphérique les lits sont des portions de cône. [...] La stéréotomie est l'art de tracer les formes à donner aux pierres en vue de leur assemblage." (*Vocabulaire de l'Architecture*, Ministère des Affaires culturelles, Imprimerie Nationale, Paris, 1972).

46. Frédéric Edelmann, "Les lumières piégées de Louis Kahn", *Le Monde* du 29 février 1992.

mathématique est issue de problèmes d'ordre artistique. La géométrie projective trouve bien son origine dans les problèmes de la représentation perspective, Poncelet ne propose pas pour autant une théorie de la peinture.

Avant d'exposer les relations entre géométrie descriptive et stéréotomie, il faut évoquer rapidement la place de la stéréotomie dans l'architecture.

I. Stéréotomie et architecture

Les premiers ouvrages de stéréotomie qui nécessitent "le trait", c'est-à-dire ceux pour lesquels la représentation en plan-coupe-élévation est insuffisante pour déterminer leurs éléments constitutifs, apparaissent au Proche-Orient dès le V^ème^ ou VI^ème^ siècle de notre ère, puis en Europe durant le Moyen Âge. La "vis de Saint-Gilles", premier exemple connu de voûte en berceau hélicoïdal, et archétype d'un des modèles les plus complexes de stéréotomie, date sans doute de la fin du XII^ème^ siècle[47]. Mais, pendant tout le Moyen Âge, le savoir des tailleurs de pierres est gardé secret par la corporation dont les statuts, publiés à Ratisbonne en 1459, précisent encore que "nul ouvrier, nul maître, nul parlier, nul journalier, n'enseignera à quiconque n'est pas de notre métier et n'a jamais fait travail de maçon comment tirer l'élévation du plan"[48].

Aussi faut-il attendre 1567, et Philibert de l'Orme, pour que soit publié le premier traité de stéréotomie[49]. Conçu comme un catalogue de cas auquel le praticien peut se référer, il comporte des planches de dessins très schématiques, qui ne sont sans doute pas éloignées des croquis sommaires que l'on mettait par écrit, avant lui, pour faciliter la transmission orale de la tradition. Les démonstrations données dans les textes d'accompagnement restent confuses et comportent même de nombreuses erreurs d'ordre géométrique. Quoi qu'il en soit, Philibert de l'Orme se présente en véritable théoricien de la stéréotomie, convaincu de son importance et de la nécessité pour les architectes de maîtriser les règles graphiques utilisées par les appareilleurs. La stéréotomie est d'abord un moyen de réaliser des "tours de force" architecturaux susceptibles de surprendre le profane : escaliers évidés dont le noyau est laissé libre, trompes qui portent en surplomb des tours ou des portions d'édifice comme celle que Desargues réalisera à Lyon, pénétrations de berceaux où différentes surfaces complexes viennent s'articuler les unes aux autres par le simple retournement des différentes lignes de joint, etc. L'assemblage judicieux des différents claveaux semble défier les lois les plus élémentaires de la statique et la pierre, matériau lourd s'il en est, ignorer la pesanteur.

47. Sur ce sujet voir J.M. Pérouse de Montclos, *L'architecture à la française*, Paris, 1982.
48. Une traduction française des statuts de Ratisbonne a été publiée dans *Artisans et ouvriers d'Alsace*, Strasbourg, 1965, pp. 97-119.
49. Philibert de l'Orme, *Le premier tome de l'architecture*, Paris, 1567 ; les livres III et IV sont consacrés au "trait". Réédition dans *Traités d'architecture*, présentation de J.M. Pérouse de Montclos, Paris, 1988.

Si, selon le mot de F.L. Wright, l'architecture est la transformation d'une brique sans valeur en brique en or, la stéréotomie va fournir quelques-uns des plus beaux exemples de ce genre de métamorphose, certes sur la pierre et non sur la brique, mais la magie de l'alchimie reste la même. La stéréotomie est surtout pour Philibert de l'Orme un moyen technique de rénovation des châteaux médiévaux. L'exemple emblématique de cette transformation est donné par son intervention au château d'Anet. La célèbre trompe (fig. 7), qui faisait à juste titre la fierté de son auteur, permet à l'architecte de résoudre un certain nombre de contraintes contradictoires. Il agrandit de la sorte le premier étage en ajoutant, en surplomb, un cabinet de travail pour Henri II sans que cette extension vienne gêner au rez-de-chaussée, ni même condamner un oculus existant qui éclaire un escalier. De plus, la stéréotomie autorise ces transformations à moindre coût, car elle évite de toucher à la structure du bâtiment existant, au gros œuvre, et permet donc des interventions légères, dans tous les sens du terme.

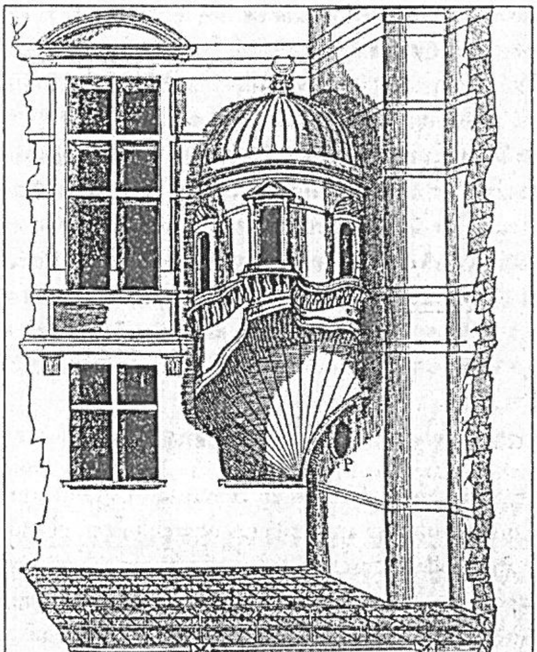

FIG. 7. – La trompe du château d'Anet
par Philibert de l'Orme.

La stéréotomie devient ainsi, avec Philibert de l'Orme, l'outil de la transformation de l'architecture médiévale en architecture moderne. Elle apporte des solutions techniques à des problèmes précis, comme pour le couvrement de la salle de réunion de l'Hôtel de Ville d'Arles, pièce carrée d'environ quinze mètres de côté qui devait être couverte sans poteau intermédiaire et pour lequel Hardouin-Mansart propose une voûte clavée qui restera comme l'un des chefs-d'œuvre de la stéréotomie française. En même temps, la stéréotomie renouvelle le vocabulaire esthétique par la très grande variété des surfaces qu'elle permet d'introduire. Voûtes ellipsoïdes, surfaces de révolution, surfaces cylindriques, coniques et plus généralement surfaces réglées, développables ou non, peuvent être utilisées.

À ce vocabulaire plastique des formes, s'ajoute celui des lignes de joint qui vont être laissées apparentes, même dans le couvrement d'espace noble, à partir de la première moitié du XVII[ème] siècle. La salle des cariatides du Louvre ou l'Église de l'Oratoire à Paris donnent deux exemples, dus à Le Mercier, d'un tel usage des lignes de joint. La décoration de la surface n'a alors plus rien d'arbitraire, comme les décorations moulurées à l'italienne. Elle n'est que la trace de sa mise en œuvre qui acquiert de ce fait une valeur esthétique. Un procédé tout à fait similaire sera utilisé au XX[ème] siècle avec les bétons bruts de décoffrage qui utilisent comme élément décoratif les marques du procédé constructif. Outre le choix des surfaces, l'appareilleur peut ainsi jouer de ces lignes apparentes qui redessinent sur l'intrados de la voûte la surface elle-même, en permettant de lire les étapes de la construction et d'obtenir avec une même surface des effets différents.

Élément caractéristique de "l'architecture à la française", selon la thèse de Pérouse de Montclos, cet art de l'appareillage atteindra son apogée au XVII[ème] siècle, qui voit à la fois la publication de nombreux traités de taille de pierres[50] et la réalisation de près de la moitié des ouvrages clavés actuellement répertoriés en France[51]. La qualité des chefs-d'œuvre de l'architecture clavée vient de la solution simultanée que la stéréotomie apporte à des problèmes qui sont à la fois d'ordre fonctionnel, statique, esthétique et économique. La maîtris concomitante de ces différentes composantes qui interviennent de manière contradictoir dans l'architecture est au reste très délicate, comme le prouvent tant de bâtiments, récen ou non.

II. Géométrie descriptive et coupe des pierres

Le savoir-faire nécessaire à la mise en œuvre de l'architecture clavée devient, av Philibert de l'Orme, un enjeu entre appareilleurs et architectes, et même, dans un jeu à tr plus complexe, entre appareilleurs, architectes et géomètres. La stéréotomie est une partie l'architecture trop importante pour être laissée aux mains des seuls appareilleurs, semble d de l'Orme, et son traité donne aux architectes les moyens d'investir ce champ. Mais, sim tanément, gêné par moment par l'absence de méthode géométrique générale pour expliq ses épures, il remet à plus tard l'exposé des tracés plus complexes que ceux étudiés dans traité, pour avoir le temps de "revoir Euclide et accommoder sa théorique avec la prati de nostre Architecture luy accompagnant Vitruve, et le lui reduisant à une cert méthode, laquelle i'aperçois en ses livres estre fort indigeste et confuse". Il insiste enc quelques lignes plus loin, sur son but "qui est de conjoindre la pratique d'Architecture

50. Citons, par exemple, le traité de M. Jousse publié en 1642, celui de F. Derand (1643), d'A. Bosse (
auxquels il faut encore ajouter l'opuscule publié par G. Desargues en 1640.

51. Voir J.M. Pérouse de Montclos, op. cit., 1982, p. 186.

la théorique dudit Euclide", expliquant même qu'il accepterait volontiers l'aide "d'hommes doctes qui font profession de lire et interpréter divinement bien ledit Euclide"[52].

Cet appel aux théoriciens sera entendu, un siècle plus tard, par Girard Desargues, géomètre de talent et précurseur de la géométrie projective, qui propose en 1640 un opuscule de cinq pages consacré à la coupe des pierres[53]. Il n'est pas certain que ce fascicule eût été du goût de Philibert de l'Orme. Du moins donne-t-il, par une construction géométrique d'une grande élégance, la solution pour une classe assez large de voûtes clavées, à défaut de présenter une "méthode universelle" comme le titre de ces quelques feuillets l'annonce. Ce texte provoqua des débats, d'une violence aujourd'hui difficilement imaginable, entre son auteur et la corporation des tailleurs de pierres, regroupée autour de J. Curabelle, collaborateur de Mansart à la Sorbonne et "meilleur appareilleur de son temps" selon Mariette[54]. On ne saurait être plus explicite que Desargues, quant aux enjeux qui se nouent autour de la géométrie du trait, lorsqu'il dénonce "les ouvriers en l'art de Maçonnerie qui dans leur pratique tatonneuse [...] se mécontent souvent [...] et qui pour s'assurer de la justesse de leurs traits les ont tous coupé de leur propre main, ce qui n'est pas démonstration aux intelligens"[29] ou encore lorsqu'il affirme "non plus que les Médecins [...] ne vont ni à l'École ni à la leçon des Apothicaires [...] aussi les Géomètres [...] ne vont ni à l'École ni à la leçon des Maçons, mais au contraire, les Maçons [...] vont à l'École et à la leçon des Géomètres, en quoi de même, les Géomètres sont maîtres et les Maçons disciples"[55]. On comprend que ce point de vue n'ait pas séduit les appareilleurs qui, forts de leurs réalisations, avaient le sentiment de n'avoir point besoin de maître. À une époque où la séparation des tâches entre les différentes corporations qui ont en charge la conception et la réalisation des bâtiments n'est pas encore très précise, l'enjeu est bel et bien la constitution du métier d'architecte. Il est certain que la maîtrise des règles graphiques joue un rôle clé dans cette constitution.

Par le type même de problèmes géométriques auxquels sont confrontés les appareilleurs pour la réalisation des ouvrages clavés, ils sont nécessairement amenés à utiliser les techniques graphiques qui permettent de passer d'un projet à sa réalisation. Lorsque le projet est simple d'un point de vue géométrique, comme c'est en général le cas des projets d'architecture, leur réalisation peut être assurée soit par la présence du concepteur sur le chantier

52. Philibert de l'Orme, op. cit., p. 62.

53. G. Desargues, *Brouillon-project d'exemple d'une manière universelle du S.G.D.L. touchant la practique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'Architecture...*, Paris, 1640.
Sur Desargues, voir R. Taton, *L'œuvre mathématique de Girard Desargues*, Vrin, 1988 et les *Œuvres complètes de G. Desargues*, J.P. Le Goff et R. Taton éd., à paraître. Sur le fascicule de coupe des pierres de Girard Desargues, voir J.P. Saint Aubin, "Les enjeux architecturaux de la didactique stéréotomique de Desargues" pp. 363-370 et J. Sakarovitch, "Le fascicule de stéréotomie : entre savoir et métiers, la fonction de l'architecte", pp. 347-362, dans *Desargues et son temps*, J. Dhombres et J. Sakarovitch éd., Blanchard, Paris, 1994.

54. J.P. Mariette, *Abecederio*, notice sur Curabelle. J. Curabelle est l'auteur d'un pamphlet, publié en 1644, intitulé *Faiblesse pitoyable du Sr G. Desargues employée contre l'examen fait à ses œuvres* ; sur ce sujet voir R. Taton, op. cit. et J.P. Le Goff et R. Taton, op. cit.

55. G. Desargues, "Reconnaissance de Monsieur Desargues" dans A. Bosse, *Manière universelle de Mr Desargues pour pratiquer la perspective par petit pied...*, Paris, 1647.

– ce qui reste la situation la plus fréquente jusqu'à la Renaissance – soit par la donnée de représentation plus expressive que le géométral, comme les perspectives ou les maquettes. Les appareilleurs, au contraire, sont placés dans des situations telles que le passage préalable par un mode de représentation de l'espace opératoire d'un point de vue géométrique est indispensable.

C'est ce mode de représentation de l'espace que Monge va théoriser et présenter en un corps de doctrine cohérent lors de ses leçons à l'École normale de l'an III et à l'École polytechnique en 1795. Monge opère ainsi une rupture avec les problèmes spécifiques de la stéréotomie, rupture que Desargues n'avait pu réaliser dans un ouvrage encore consacré à la coupe des pierres. Théorie géométrique sous-jacente à la représentation d'un objet tridimensionnel selon ses deux projections, la géométrie descriptive suppose l'espace rapporté à deux plans orthogonaux entre eux. À tout point de l'espace, on associe ses deux projections orthogonales, sur chacun des deux plans de référence que l'on rabat ensuite l'un sur l'autre. Tout point de l'espace est ainsi représenté par un couple de points du plan, son "épure". Cette première convention permet de représenter les courbes de l'espace et les corps polyédriques. Monge adjoint une seconde convention pour la représentation des surfaces qu'il définit en terme de directrices et de génératrices : "pour exprimer la forme et la position d'une surface courbe, il suffit, pour un point quelconque de cette surface, et dont une des projections peut être prise à volonté, de donner la manière de construire les projections horizontale et verticale de deux génératrices différentes qui passent par ce point"[56]. À ces deux conventions sont associées différentes opérations géométriques. "Les méthodes de la géométrie descriptive" (rotations, rabattements et changements de plan) permettent de déterminer les vraies grandeurs de distances ou d'angles, la méthode des surfaces auxiliaires permet, elle, de construire les intersections de surfaces (fig. 8). C'est cet ensemble de conventions et de méthodes qui constitue les principes de base de la géométrie descriptive.

Si ces différentes techniques graphiques ne sont pas explicitées avant les leçons de Monge, du moins apparaissent-elles dans les traités de taille de pierres, celui de Philibert de l'Orme d'abord, puis dans ceux qui seront publiés aux XVII$^{\text{ème}}$ et XVIII$^{\text{ème}}$ siècles. Mais c fait ne saurait à lui seul rendre compte des liens de parenté privilégiés qui unissent la géomé trie descriptive et la stéréotomie.

Des techniques graphiques similaires sont également utilisées en gnomonique[57], dan les traités de charpente ou dans ceux concernant le tracé des ombres et il ne resterait au traités de taille de pierres qu'un avantage d'antériorité. La variété et la complexité des su faces mises en œuvre dans l'architecture clavée et, par conséquent, la diversité des courb d'intersection qui interviennent, pour importantes qu'elles soient, ne nous semble pas êt l'élément déterminant. Si les méthodes des appareilleurs sont à la géométrie descriptive que les traités de perspective sont à la géométrie projective, c'est que, contrairement charpentier ou au chaudronnier qui construisent leurs objets en déterminant la "peau" volume qu'ils réalisent, le tailleur de pierres travaille directement dans la "masse". Chac

56. G. Monge, *Géométrie descriptive*, p. 18.
57. La gnomonique est l'art de tracer les cadrans solaires.

bloc de pierre, généralement équarri (et donc ayant la forme d'un parallélépipède rectangle), matérialise une portion de l'espace à trois dimensions du géomètre. Aussi n'est-il pas surprenant de constater que la technique de taille la plus primitive, celle dite par "équarrissement", soit la première exemplification du principe de représentation de l'espace en double projection. Cette technique permet en effet de tailler un voussoir à partir de ses seules projections horizontale et verticale sans l'avoir préalablement déterminé géométriquement dans sa totalité[58]. La méthode de taille par équarrissement fournit donc un moyen de "découvrir" physiquement un volume que l'on n'avait pas encore pu nécessairement imaginer. Contrairement à la méthode par équarrissement, celle dite "par panneau", suppose, avant toute taille, d'avoir déterminé géométriquement la forme de chacune des faces des voussoirs. Plus économique en pierre et plus rapide de mise en œuvre, elle nécessite bien entendu des tracés plus complexes qui font intervenir les opérations de rabattement, de changement de plan ou l'usage de surfaces auxiliaires que nous évoquions précédemment. Aussi n'est-ce qu'après la publication des différents traités de stéréotomie que cette seconde méthode s'impose définitivement.

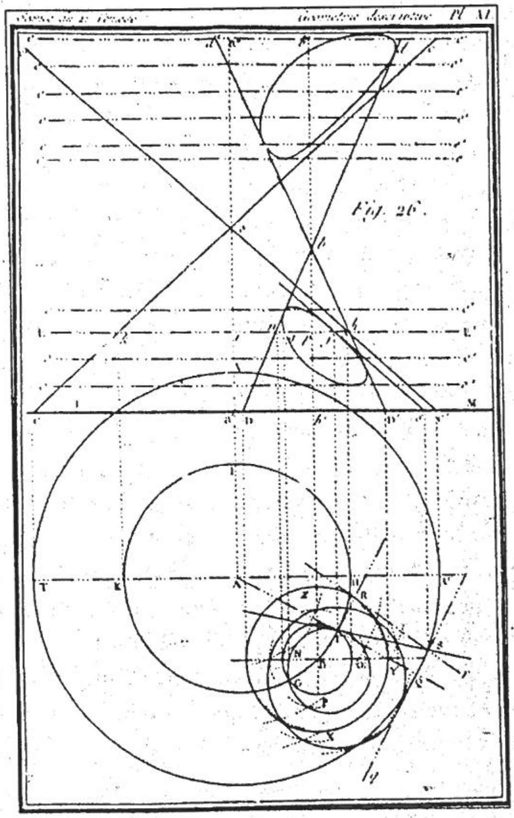

FIG. 8. – Épure de l'intersection de deux cônes ; méthode des plans auxiliaires.
Monge, *Géométrie descriptive*, pl. XI.

58. Ce point plus technique est exposé en détail dans J. Sakarovitch, "La taille des pierres et la géométrie descriptive", *La figure et l'espace, Actes du colloque inter-IREM de Lyon*, pp. 117-138, Lyon, 1993.

Or, la géométrie descriptive parvient à théoriser à la fois les techniques graphiques mises en œuvre dans les traités mais également à transférer d'une pratique vers une construction abstraite, l'étape essentielle qui permet la découverte de nouveaux volumes, de "formes inconnues résultant nécessairement des formes primitives données"[59] que la méthode de taille par équarrissement permet de réaliser de façon concrète. De même que lors de la taille apparaît un volume qui n'a pas été déterminé préalablement, de même, au moment du tracé de l'épure, on "construit", on détermine le volume cherché. La géométrie descriptive permet, en effet, de progresser pas à pas dans cette recherche, à l'aide de quelques principes simples, de deux algorithmes propres, selon Dupin, ceux de projection et de rabattement. La force de la géométrie descriptive, dans cette activité de recherche, vient de ces moyens algorithmiques et systématiques qui permettent d'avancer de façon sûre et progressive.

Il n'est pas nécessaire de "voir" l'objet dans l'espace avant d'en faire l'épure ; grâce à la géométrie descriptive on peut découvrir une forme que l'on n'arrivait pas à imaginer. La géométrie descriptive permet de représenter sur un plan des objets tridimensionnels, mais pour ceux dont les formes sont simples, elle reste un moyen très abstrait et difficile à saisir, par rapport à une axonométrie (par exemple). Elle ne devient irremplaçable qu'à partir du moment où l'on doit représenter un objet complexe qui ne peut pas être imaginé d'une manière immédiate. Sauf à posséder une grande expérience (qu'il faut bien acquérir d'une façon ou d'une autre), on ne connaît pas, a priori, la forme des voussoirs constitutifs d'une baie plein-cintre d'axe quelconque dans une tour cylindrique ou conique. Pourtant, si la tour et l'intrados de la baie sont tous deux bien définis, les voussoirs le sont également. Le problème est de les représenter sur la feuille de papier sans se les être au préalable "représentés" mentalement. C'est cette étape que la géométrie descriptive permet de franchir.

Enfin la géométrie descriptive, comme la géométrie différentielle de Monge, emprunte à la taille des pierres sa définition des surfaces, ou plus exactement donne une définition théorique de la notion de surface qui dérive directement de la manière dont celles-ci sont obtenues par le tailleur de pierres. Dans la pratique, les voussoirs sont toujours délimités par des surfaces réglées. Le tailleur de pierres note la position des génératrices qu'il suivra avec son ciseau, position repérée sur deux directrices tracées sur deux faces d'un voussoir. Monge reprend cette définition des surfaces et ne les représente que par deux courbes, une directrice et une génératrice, précisant, si besoin est, la loi d'évolution de la génératrice lors de son déplacement le long de la directrice. Ce mode de représentation des surfaces, que Monge introduit lors de son cours à l'École normale, nous semble directement inspiré des pratiques de taille. Mais là encore, cette concordance entre la théorie de Monge et les usages des tailleurs de pierres vient du fait que ces derniers opèrent directement "dans la masse", comme le géomètre dans l'espace.

59. Hachette, *Traité de géométrie descriptive...*, Paris, 1822, p. XI.

La géométrie descriptive devient une méthode graphique universelle, applicable à toutes les techniques particulières, parce qu'elle théorise deux phases essentielles : découverte des formes et représentation des surfaces. Or, méthodes graphiques de détermination des vraies grandeurs, algorithme de découverte des formes et mode de définition et de représentation des surfaces, qui caractérisent la géométrie descriptive, sont tous trois directement issus des méthodes et des traités des appareilleurs.

D'ailleurs Monge commence sa carrière à l'École du Génie de Mézières à dix-huit ans, en entrant à l'atelier de dessin, de coupe des pierres et de moulage pour aider les élèves-officiers dans les travaux de cet atelier. Et durant toute la période où Monge enseigne à Mézières, de 1766 à 1784, alors que l'expression "géométrie descriptive" n'a pas encore été introduite (elle apparaît pour la première fois sous la plume de Monge en 1792[60]), lui et ses disciples utilisent de façon synonyme "les méthodes de la coupe des pierres".

III. L'effet retour

Ayant tiré des méthodes des tailleurs de pierres une théorie géométrique, Monge a l'ambition de la voir modifier, en retour, les tracés des appareilleurs et par la même les réalisations de l'architecture clavée. Il propose en effet dans ses leçons à l'École normale, comme application de la géométrie descriptive, une véritable théorie de l'appareillage. Il énonce une série de conditions que doivent satisfaire les voussoirs, et montre "qu'il n'existe pas de ligne sur la surface courbe qui puisse remplir en même temps toutes ces conditions, que les deux suites de ligne de courbures, et elles seules les remplissent complètement"[61]. Pour résoudre les problèmes statiques, géométriques, esthétiques et pratiques que pose l'appareillage des voûtes, la seule solution consiste à choisir comme lignes de joint les lignes de courbure de la surface. Le type d'appareillage d'une voûte est donc, selon Monge, totalement déterminé par la surface adoptée pour son intrados.

60. Voir R. Taton "Un projet d'écoles secondaires pour les artisans et ouvriers préparés par Monge en septembre 93", Annexe 20 dans *L'École normale de l'an III, Leçons de Mathématiques, Laplace, Lagrange, Monge*. J. Dhombres Éd., Paris, Dunod, 1992.

61. Monge, op. cit., p. 134. Dans ses leçons de géométrie descriptive (p. 125), Monge donne une définition intuitive des lignes de courbure :

> ... si, considérant sur une surface courbe quelconque un point quelconque, on conçoit une normale à la surface en ce point, on peut toujours passer, selon deux directions différentes, à un autre point pour lequel la nouvelle normale soit dans un même plan avec la première, et que ces deux directions étant dans des plans normaux rectangulaires entre eux, elles sont elles-mêmes à angles droits sur la surface courbe [...] ces deux directions sont en général les seules pour lesquelles cet effet puisse avoir lieu.

Les normales à la surface le long d'une ligne de courbure engendrent donc une surface développable (et cette propriété est caractéristique).

Comme il le remarque immédiatement après avoir exposé sa théorie, dans le cas des surfaces simples (surfaces de révolution, cylindres, ...) les tailleurs de pierres s'étaient spontanément conformés à la règle d'appareillage selon les lignes de courbure. Il n'en va plus de même, naturellement, dans le cas de surfaces plus complexes. Monge prend comme exemple l'ellipsoïde, surface qu'il a étudiée antérieurement et dont il a déterminé les lignes de courbure[62]. Les voûtes ellipsoïdes, très fréquentes dans l'architecture baroque et classique (on en trouve à Saint-Pierre de Rome, dans les églises de la Sorbonne, du Val de Grâce, des Invalides...) furent traditionnellement appareillées, comme les voûtes sphériques ou les ellipsoïdes de révolution, avec des rangs d'assise horizontaux. Emporté par l'esthétique ondoyante des courbes qu'il étudie, Monge glisse de sa fonction de géomètre à celle d'architecte et décrit ce que pourrait être un amphithéâtre idéal qui respecterait la géométrie de la surface :

> De toutes les formes qu'on pourrait donner à l'amphithéâtre, il n'y en a aucune dont la loi soit plus simple et plus gracieuse que l'ellipse ; il faudrait donc que la salle fût elliptique, et qu'elle fût couverte par une voûte.
> Le service des Assemblées législatives exige un emplacement pour le bureau, en devant duquel est la tribune de l'orateur. En plaçant le bureau à l'un des sommets de l'ellipse, on pourrait lui conserver un espace suffisant pour la commodité du service, et l'orateur se trouverait naturellement placé sous un des ombilics de la voûte ; l'amphithéâtre n'occuperait que la partie qui serait en avant. [...] La salle qui n'aurait ni tribune ni aucune espèce d'irrégularité, pourrait être décorée par des colonnes, à chacune desquelles correspondrait une nervure de la voûte, pliée suivant la ligne de courbure ascendante. Toutes ces nervures, verticales à leur naissance, se courberaient autour de l'un ou l'autre ombilic, redescendraient ensuite à plomb sur les colonnes opposées, et elles seraient croisées perpendiculairement par d'autres nervures pliées suivant les lignes de l'autre courbure. Les intervalles de ces nervures pourraient être à jour, soit pour éclairer la salle, soit pour donner des issues à l'air, et formeraient un vitrage moins fantastique que les roses de nos églises gothiques. Enfin deux lustres suspendus aux ombilics de la voûte, et à la suspension desquels la voûte entière semblerait concourir, serviraient à éclairer la salle pendant la nuit.

62. Monge a montré que les lignes de courbure de l'ellipsoïde sont des courbes gauches dont l'une des familles se projette horizontalement selon des ellipses et l'autre selon des hyperboles. Les deux familles de courbes permettent de définir deux points limites qui sont les "ombilics" de la surface, point pour lesquels la courbure normale est la même dans toute les directions. Ces résultats sont publiés dans :
Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie à l'usage de l'École polytechnique, Paris, an III, Feuille N° 20. Ces feuilles furent rééditées en 1811 sous le titre *Application de l'analyse à la géométrie*.
"Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde", *Journal de l'École polytechnique*, 1796, pp. 162-163.

> Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails à cet égard ; il nous suffit d'avoir indiqué aux artistes un objet simple, et dont la décoration, quoique très riche, pourrait n'avoir rien d'arbitraire, puisqu'elle consisterait principalement à dévoiler à tous les yeux une ordonnance très gracieuse, qui est dans la nature même de cet objet[63].

Plus qu'une simple description d'un amphithéâtre (ou une proposition pour la salle de l'Assemblée nationale alors en discussion), c'est une conception de l'architecture qui s'exprime ici, mais une conception très particulière qui réduit l'architecture à la géométrie.

Dans l'article du *Journal de l'École polytechnique* où il reprend la description de cet amphithéâtre, Monge explique que

> [les artistes] excluaient presque généralement de la composition des voûtes [...] les surfaces courbes dont ils ne connaissaient pas les lignes de courbure, lors même que les circonstances les exigeaient impérieusement ; et c'est à cela principalement qu'on doit attribuer le mauvais effet que produisent en général dans l'architecture, les morceaux de traits de coupe de pierres, parce que pour rendre un trait exécutable, on ne choisit pas toujours la surface de la voûte la plus convenable[64].

Or, ces critiques ne sont fondées ni d'un point de vue statique, ni d'un point de vue architectural. Les limites purement internes à la théorie mongienne apparurent lors de la mise en place du réseau de chemin de fer, à l'occasion de la construction des "ponts biais" en pierre – c'est-à-dire des ponts pour lesquels la direction du tablier n'est pas orthogonale à celle de la voie franchie. Dans les articles théoriques traitant des délicats problèmes d'appareillage que posent ce genre d'ouvrages, les ingénieurs des Ponts et Chaussées qui en ont la charge sont par exemple amenés à distinguer entre "lignes de plus grande contraction" et lignes de plus petite courbure de la surface, ou à donner une définition des surfaces de joint en fonction de la pression exercée en chaque point et non plus en fonction de la surface d'intrados[65]. Alors que le problème est essentiellement d'ordre statique, l'approche de Monge, purement géométrique, ne lui permet pas d'énoncer une théorie aussi générale qu'il semble l'affirmer. Elle lui permet, par contre, de condamner les tracés utilisés par les appareilleurs.

63. Monge publia ce texte deux fois, dans les ouvrages donnés en référence à la note précédente. Hachette et Leroy, qui succèdent à Monge pour l'enseignement de la géométrie descriptive à l'École polytechnique, le citent intégralement dans leurs cours de stéréotomie, (Hachette, *Traité de géométrie descriptive...*, Paris, 1822, p. 293 ; Leroy, *Traité de géométrie descriptive*, Paris, 1842, pp. 366-367).

64. Monge, op. cit., 1796, p. 149. Hachette reprend également à son compte cette violente critique des appareilleurs.

65. Voir, par exemple, F. Lefort, "Études relatives à la construction des ponts biais", *Annales des Ponts et Chaussées*, 1839, p. 290 et M. Graeff, *Appareil et construction des ponts biais*, Paris, 1852, p. 12.

Déjà trop restrictive d'un pur point de vue technique, cette géométrisation excessive l'est, a fortiori, d'un point de vue architectural. L'architecture, clavée ou non, ne se réduit pas à des lignes géométriques. Suffit-il de placer, dans le jardin de son pavillon de banlieue, les petits nains selon les lignes de courbure du terrain, pour être assuré de l'effet esthétique ? La voûte de l'Hôtel de Ville d'Arles (fig. 8), qui n'est pas appareillée selon les lignes de courbure de la surface d'intrados, est-elle d'un si "mauvais effet" ? Et tant de trompes ou d'escaliers ? Lier de façon intrinsèque l'appareillage à la surface de la voûte, c'est priver l'appareilleur d'une des libertés essentielles dans l'architecture clavée, qui permet un jeu infini avec les lignes de joint. Elles peuvent certes souligner la surface d'intrados, comme le prescrit Monge, mais elles peuvent également la nier, provoquer de subtiles tensions, indiquer des mouvements. Il est possible d'appareiller différemment des surfaces d'intrados identiques ou au contraire de façon similaire des surfaces différentes. Si certains des plus beaux exemples du "jeu savant, correct et magnifique des volumes assemblés sous la lumière"[66] nous sont donnés par l'architecture clavée, c'est précisément grâce à la richesse d'utilisation que cette technique permet.

Aveuglé (ou pour le moins ébloui) par la théorie géométrique qu'il a fondée, Monge nie une des dimensions fondamentales de l'appareillage, ou plus précisément, n'en retient qu'un des aspects. La description qu'il donne de son "amphithéâtre idéal" est là pour nous rappeler ses visions architecturales. Ces conceptions seraient sans conséquence si elles n'étaient que celles, personnelles, de Monge. Mais, appuyées sur une théorie géométrique, par ailleurs efficace, elles prennent une valeur universelle. Hachette, et ses successeurs dans l'enseignement de la géométrie descriptive à l'École polytechnique, les reprennent à leur compte. Les appareilleurs tirent leurs forces, jusqu'au XVIIIème siècle, de leurs compétences à la fois pratiques et théoriques dont ils ont l'exclusivité et leur profession suppose une maîtrise complète et simultanée des problèmes géométriques, statiques et architecturaux, intervenant dans l'architecture clavée. À partir du moment où le côté purement théorique de leurs connaissances se développe indépendamment d'eux, ils sont soumis aux critiques des ingénieurs qui les jugent du haut de leur savoir scientifique, et de leur position institutionnelle. Ils se voient, de ce fait, retirer la compétence dans une des branches constitutives de leur profession, sans pour autant qu'une séparation des tâches plus poussée entre appareilleurs, architectes et géomètres (ou ingénieurs) vienne renouveler le vocabulaire des formes de l'architecture clavée.

Certes l'usage de la stéréotomie dans l'architecture commence à décliner dès la deuxième moitié du XVIIIème siècle, pour des raisons tant économiques qu'esthétiques. Mais on pouvait légitimement attendre, et tel était sûrement le souhait du fondateur de l'École polytechnique, d'une théorisation adéquate du tracé des appareilleurs un élargissement du champ des possibles, un nouvel élan donné à une technique qui s'essouffle. Force est de constater qu'il n'en est rien. Nous n'avons pu trouver d'exemple ni de réalisation architecturale clavée faisant intervenir des surfaces nouvelles, ni de voûte dont l'intrados a une surface complexe qui soit appareillée conformément à la théorie de Monge.

66. Définition de l'architecture donnée par Le Corbusier.

La géométrie de l'appareilleur est à la fois la source de l'émotion artistique que l'architecture clavée procure, et la base d'une branche de la géométrie ; mais l'espoir qu'avait Monge de voir, par un juste retour des choses, la théorie venir au secours de l'art qui l'a engendrée, est resté du domaine de l'utopie.

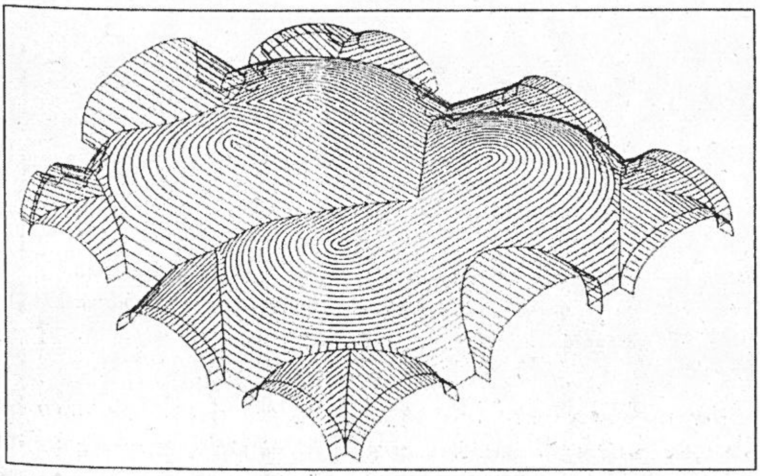

FIG. 9. – La voûte de l'Hôtel de Ville d'Arles, par Hardouin-Mansart, 1673.

FIG. 9 bis. – La voûte de l'Hôtel de Ville d'Arles.

Joël Sakarovitch est architecte, Maître de conférences à l'Université de Paris V et Chef de Travaux Pratiques à l'École d'Architecture de Paris-Villepinte.

Mathématiques et Art

Sous la direction de Maurice Loi

Table