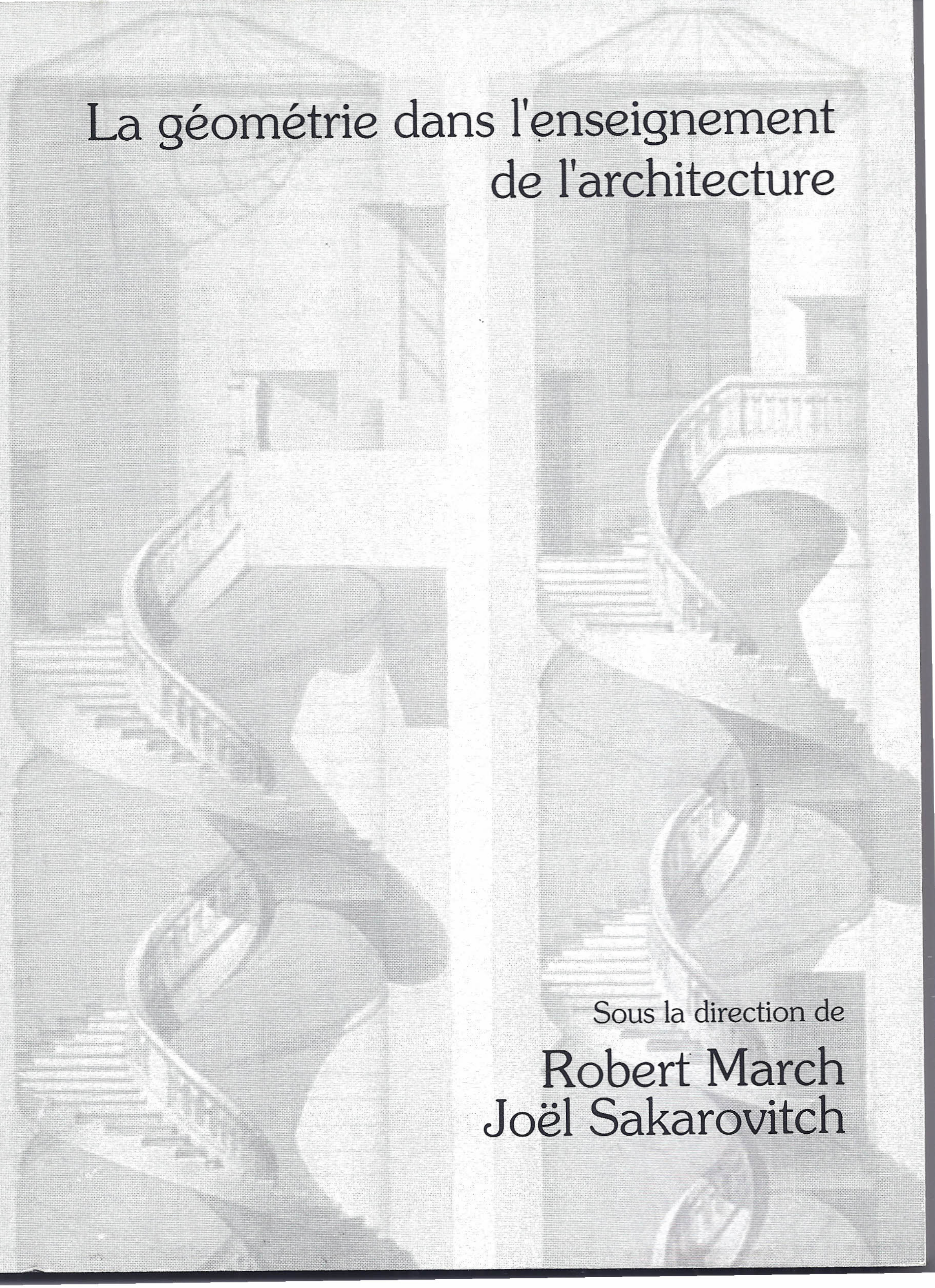
IN EXTENSO,

recherches à l'École d'Architecture Paris-Villemin



La géométrie dans l'enseignement de l'architecture

Sous la direction de

Robert March
Joël Sakarovitch

Introduction

Géométrie et Architecture : une histoire très actuelle

C'est fin 1995 que s'est tenu, à Paris, le colloque "La géométrie dans l'enseignement de l'architecture", sur l'initiative du laboratoire de recherche "Géométrie-Structure-Architecture" de l'École d'architecture Paris-Villemin. La publication des travaux de ce colloque se fait donc tardivement. Nous l'avions envisagée dans des délais autrement raisonnables. Pourtant, depuis, il ne s'est pas tenu, à notre connaissance, de conférence sur ce sujet spécifique, qui aurait pu rendre partiellement caducs les textes que nous publions ici. C'est aussi ce qui nous a poussés à donner suite à ce projet. Actuels, ces textes le restent. Urgent, le débat l'est plus encore alors que sont mis en cause, ici ou là, la place des mathématiques dans l'enseignement secondaire et, plus près de nous, l'intérêt de la géométrie et de la géométrie descriptive dans la formation des architectes.

Si on examine l'évolution des programmes des Écoles d'architecture, en France tout au moins, sur ces vingt dernières années ou si on se penche sur les programmes élaborés pour les nouvelles Écoles d'architecture de la région Ile-de-France, le constat est sans appel : il y a un net recul de l'importance accordée aux enseignements scientifiques dans la formation des futurs architectes, ce qui semble malheureusement rencontrer les attentes de nombre d'étudiants, voire d'enseignants. Explicite ou non, la raison majeure de cette réduction tient aux bouleversements dus à l'informatique, aussi bien dans l'exercice professionnel de l'architecte que dans sa formation. Nous ne sommes pas les derniers à en prendre la mesure. Venus d'horizons géographiques très divers et d'expériences très contrastées, les participants au colloque s'en sont tous fait l'écho, au-delà des contributions qui en traitaient spécifiquement. L'informatique dévore notre espace et transforme radicalement les outils de sa perception et de sa représentation.

La déferlante multimédiatique laisse quelque peu sonnés les producteurs d'images à l'ancienne. Que reste-t-il des disciplines qui s'attachaient à concevoir et à donner à voir le projet sur la bonne vieille table à dessin ? Au premier rang des victimes, la perspective, savamment construite par géométral et élévation, et dont on attendait les rendus, réalistes ou flatteurs, se voit condamnée sans appel par les prouesses des logiciels 3D. Les mathématiciens, sous le nom de projection conique, la fréquenteront toujours pour peu qu'ils s'intéressent à la géométrie projective mais le nom de Desargues, qui lui a donné ses lettres de noblesse, n'évoquera bientôt plus rien à nos étudiants.

La géométrie descriptive en réchappera-t-elle ? Pour qui n'y voudrait voir que technique de production d'images, elle est tout autant condamnée. Mais la question est plus profonde. Même si on la désigne souvent sous le terme de géométrie de la représentation, son objet est bien plus vaste. Elle reste une discipline majeure pour qui veut apprendre à maîtriser l'espace, à le produire. Le premier logiciel venu permet, certes, de regarder tout objet modélisé sous une infinité d'angles, de le projeter simultanément sur trois ou quatre plans, de réunir donc sur un même écran vues de face, de dessus, de côté, perspectives coniques et axonométries. Si on ajoute les ombrages sous éclairages multiples, et les séquences animées qui permettent tout parcours à la carte dans l'espace virtuel du projet, on voit mal ce qui pourrait encore sauver les techniques traditionnelles, autre que l'acharnement thérapeutique. Sauf peut-être cette idée simple que voir n'est pas comprendre, et que représenter suppose de concevoir.

Dès lors, il est indispensable de repenser l'apprentissage de la conception, et toutes les disciplines qui contribuent à la formation de la capacité à concevoir, à projeter, en intégrant complètement les extraordinaires potentialités de l'outil informatique. Ne pas renoncer aux enseignements de la géométrie de la représentation, mais les repenser. Mieux cerner, au-delà de l'acquisition de techniques assez complexes, ce qui en fait des enseignements profondément formateurs et, à ce titre, des espèces rares, menacées de disparition si l'on n'y prend garde.

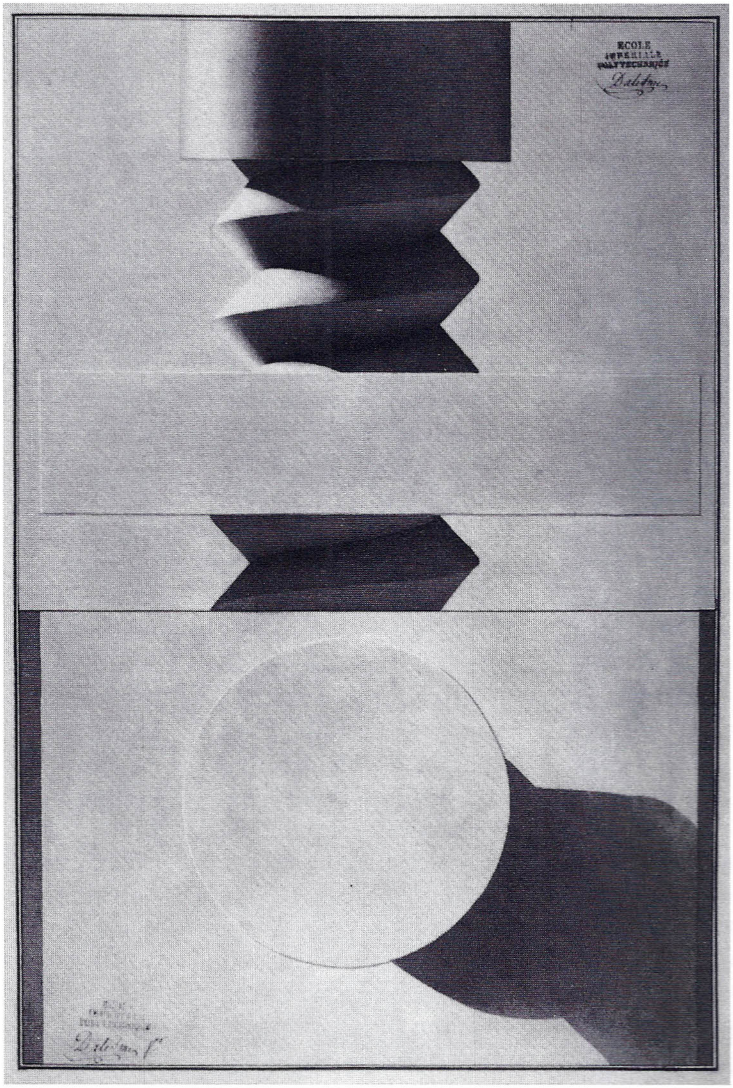
Il reste aussi à maîtriser l'outil informatique lui-même. Là encore, cela passe par un apprentissage graduel de ses multiples fonctionnalités, pour se familiariser avec des centaines de commandes, savoir les mettre en œuvre dans des configurations variées. Les logiciels actuels sont déjà hypertrophiés. Conçus d'abord pour des usages professionnels de haut niveau, leur véritable maîtrise passe par un apprentissage exigeant, appuyé sur des connaissances approfondies. La géométrie est de celles-là. Les modeleurs surfaciques que proposent la plupart des logiciels permettent de faire à peu près tout, ce qui veut dire aussi un peu n'importe quoi. La vraie difficulté commence quand on veut échapper au n'importe quoi, ne pas s'aveugler de la magie de l'image, et mettre la forme au service d'une idée constructive, d'un projet maîtrisé.

La variété des contributions que nous publions ici témoigne de l'intérêt de ce questionnement. Elles apportent des éclairages croisés à ces interrogations. Les approches historiques s'y révèlent fécondes, qu'il s'agisse d'évoquer des "querelles" anciennes finalement si proches de certains débats actuels ou de donner de la profondeur à la réflexion sur les rapports entre géométrie et architecture. Diverses recherches pédagogiques s'attachent à renouveler les modes d'apprentissage de la représentation de l'espace. Des contributions venues d'autres horizons permettent de ne pas s'en tenir à une géométrie strictement hexagonale. L'informatique, enfin, y trouve une place multiple, d'abord en tant qu'outil qui révolutionne les moyens de concevoir et de représenter l'espace, mais aussi en tant que sujet de recherches originales.

Ce numéro de la revue *In Extenso* se veut ainsi une contribution à la réflexion engagée pour repenser les rapports anciens mais toujours fondamentaux entre géométrie, imagination et architecture, c'est-à-dire finalement repenser la formation des architectes.

Robert March, Joël Sakarovitch
Laboratoire "Géométrie-Structure-Architecture"
École d'architecture Paris-Villemin

Aperçus historiques



Page précédente : Vis à filet triangulaire, lavis. Portefeuille d'épures de Dalesme, 1812. Archives de l'École polytechnique.

De la modernité de la géométrie descriptive

Joël Sakarovitch
Département Espace-Structure-Représentation, École d'architecture Paris-Villemin
UFR de mathématiques et d'informatique, Université René Descartes

La géométrie descriptive jouit de nos jours d'une image désuète qui lui colle à la peau. Et ce pour deux raisons. D'une part elle appartient à une branche aujourd'hui morte des mathématiques, ce qui entraîna son abandon progressif des programmes des classes préparatoires aux écoles d'ingénieurs. D'autre part, la puissance toujours croissante des outils de DAO/CAO semble renvoyer les techniques antérieures de représentation de l'espace au rang des hiéroglyphes égyptiens ou à l'art de la calligraphie.

Cette vision me semble doublement fausse, pour deux raisons au demeurant opposées. D'une part, paradoxalement, on peut considérer que la géométrie descriptive était démodée dès sa naissance et n'a pas attendu l'informatique pour le devenir. De l'autre, inversement, ce qui faisait sa modernité au moment de sa création par Gaspard Monge sous la Révolution française, n'a, à mon avis, rien perdu de son actualité.

La géométrie descriptive est en effet frappée dès sa naissance d'une sorte d'ambiguïté fondamentale – d'une "heureuse ambiguïté" pour reprendre l'expression qu'Auguste Comte appliquait au mot cœur – qui sans doute la caractérise le mieux. La géométrie descriptive est à la fois une technique graphique, une branche de la géométrie savante et une discipline scolaire ; elle est simultanément point d'aboutissement de méthodes anciennes de représentation de l'espace et point de départ de la géométrie moderne. Cette ambiguïté est la raison d'être de la géométrie descriptive ; elle tient à la nature profonde de ses origines, aux conditions de son émergence et transparaît dans les sentiments partagés qu'elle inspire à ceux qui l'ont enseignée, comme à ceux qui s'y sont frottés lors de leur cursus estudiantin.

Monge lui-même est porteur de cette ambivalence. D'un côté il fait de la géométrie descriptive la colonne vertébrale de ses projets pédagogiques[1] et prononce en 1795 une série de leçons de géométrie, remarquable à plus d'un titre, à l'École normale de l'an III et à l'École polytechnique. Mais simultanément, dans le seul texte connu où il expose son avis personnel sur la branche de la géométrie qu'il vient de fonder, il en donne une présentation très technique. Durant la campagne d'Italie, le père de l'École polytechnique, convoqué par Bonaparte dans les bureaux de l'état-major, relate l'entrevue en ces termes : "Tous les aides de camps me demandèrent en entrant de leur donner une idée de la géométrie descriptive. Je le fis et le général me dit : arrangez-vous, nous avons encore sept à huit jours d'ici à Rome ; il nous faut tous les soirs une petite leçon de géométrie descriptive. Vous voyez, mon cher Marey, que le général sait choisir ses armes et qu'après avoir marché contre l'Empereur avec des canons, il marche contre le Pape avec l'évidence. Mais tout ceci est entre nous. Je ne voudrais pas que ma géométrie descriptive montât si haut ; pour qu'elle soit utile et qu'elle remplisse son véritable but, il faut qu'elle aille terre à terre. C'est l'engrais des champs qu'il ne faut pas jeter sur les arbres ; c'est la géométrie des ouvriers et des artistes ; c'est le fondement de l'industrie nationale et non l'objet des méditations des philosophes."[2] Et il faut noter que le fondateur de la géométrie descriptive ne l'enseigne lui-même que très peu de temps, sans prendre la peine de publier son cours[3], ce qui pourrait être interprété comme la marque du peu d'estime où il la tient.

Selon un balancement assez similaire, Chasles expose en 1837[4], avec une rare finesse, la richesse des outils géométriques développés par Monge dans ses leçons de géométrie descriptive (cf. ci-dessous), puis il la réduit à une technique graphique en 1846[5]. On peut ainsi multiplier les exemples, citer La Gournerie ou Carlo Bourlet[6], montrer leur ambivalence vis-à-vis d'une matière qu'ils ont par ailleurs excellé à enseigner. On peut tout aussi bien citer "l'ambivalence" de l'institution scolaire ou universitaire à l'égard de la discipline, le rôle tantôt exorbitant, tantôt dérisoire qui lui est accordé dans le curriculum des élites.

Ce n'est donc pas le DAO qui rend la géométrie descriptive obsolète. Mais inversement – et c'est naturellement ce qui m'intéresse ici prioritairement – les raisons fondamentales qui justifiaient son introduction dans le curriculum des élèves-ingénieurs ou des élèves-architectes n'ont pas davantage disparu. Par les choix que la géométrie descriptive impose d'opérer, par la façon dont elle fait découvrir des formes spatiales complexes, par l'explicitation des opérations géométriques qu'elle propose, par l'usage d'un passage réciproque espace-plan, par la position charnière qu'elle occupe entre théorie abstraite et pratique graphique, l'apprentissage de la géométrie descriptive n'a rien perdu de son actualité.

Dessiner (une épure), c'est choisir

Moyen de représenter l'espace, certes, la géométrie descriptive est également un outil pour ne pas le représenter, pour s'abstraire d'une figuration première, pour "épurer" les surfaces ou les objets mathématiques que le géomètre – ou l'architecte – manipule. Un exemple, tiré du cours fondateur, illustrera mon propos. Monge termine la deuxième partie de son cours consacré aux plans tangents à une surface, par l'étude d'un problème assez délicat, *construire le plan tangent à une surface de révolution passant par une droite donnée,* pour lequel il présente une solution originale (cf. fig. 1). Cette épure me semble un bon exemple de

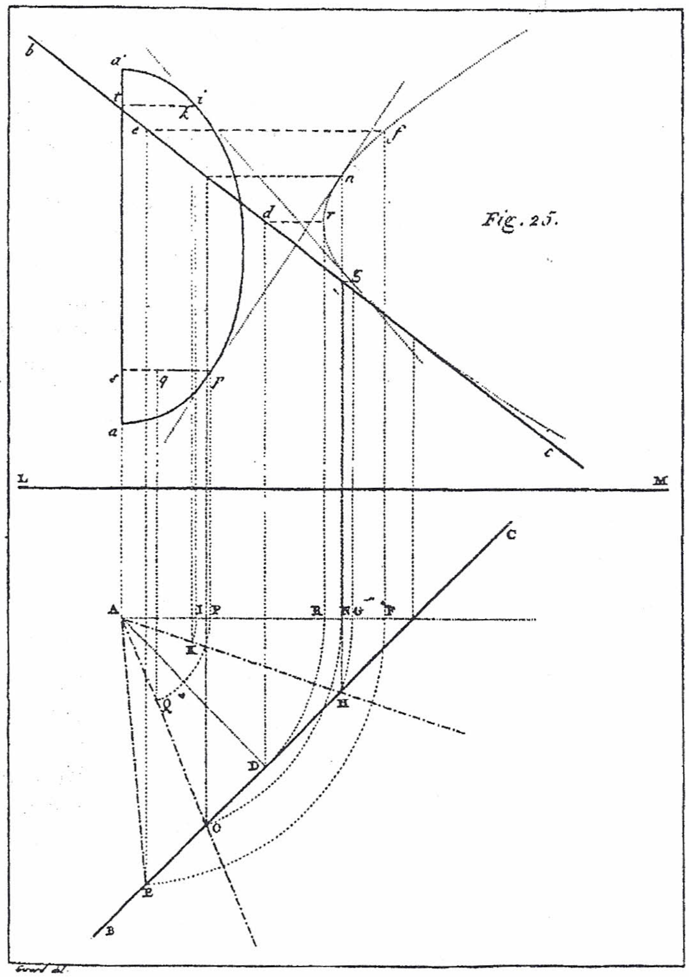


Fig. 1 – Plan tangent à une surface de révolution passant par une droite donnée
Monge, *Géométrie descriptive*, Planche X.

Considérant le plan tangent cherché, Monge le suppose entraîné dans le mouvement de rotation qui engendre la surface de révolution. La droite, comprise dans le plan (et notée (BC, bc) sur la figure) engendre alors un hyperboloïde de révolution. Monge montre d'abord que le plan tangent à la première surface de révolution l'est également à la seconde, utilisant une forme de réciproque du théorème fondamental du plan tangent à une surface, détermine point par point l'intersection de l'hyperboloïde de révolution avec le plan frontal contenant l'axe de la première surface de révolution et achève la construction à partir des tangentes communes à l'hyperbole ainsi déterminée et la génératrice de la première surface de révolution.

la manière dont Monge exprime la relation entre un raisonnement géométrique et sa traduction graphique, sa "représentation". En effet, ni la surface de révolution, ni le plan tangent, ni l'hyperboloïde de révolution annexe qu'il introduit dans le corps de la démonstration, n'apparaissent explicitement sur l'épure.

Le réflexe premier lorsque l'on trace une figure de géométrie, consiste toujours à représenter une surface par son contour apparent, après l'avoir éventuellement limitée arbitrairement si cette surface est infinie. Mais le principe de définition des surfaces introduit par Monge au début de son cours, et qui, au même titre que la représentation du point, caractérise la géométrie descriptive[7], revient précisément à se passer des contours apparents pour ne raisonner qu'en terme de génératrice et de directrice. Autant que par l'utilisation de la projection, la construction du plan tangent à une surface de révolution appartient à la géométrie descriptive par l'usage de la définition des surfaces[8]. L'épure de géométrie descriptive oblige d'abord à choisir les éléments dont on a besoin pour les démonstrations géométriques. "L'ancienne Géométrie est hérissée de figures. La raison en est simple. Puisqu'on manquait alors de principes généraux et abstraits, chaque question ne pouvait être traitée qu'à l'état concret, sur la figure même qui était l'objet de cette question, et dont la vue seule pouvait faire découvrir les éléments nécessaires à la démonstration ou à la solution cherchée. Mais on n'a pas été sans éprouver les inconvénients de cette manière de procéder, par la difficulté de construction de certaines figures, et par leur complication, qui en rend l'intelligence laborieuse et pénible. C'est surtout dans les questions de la géométrie à trois dimensions, où les figures peuvent devenir tout à fait impossibles, que l'inconvénient que nous signalons se fait le plus sentir", écrit Chasles, ajoutant même, à la grande surprise de son lecteur : "Personne, plus que Monge, n'a conçu et n'a fait de la Géométrie sans figures."[9] Pourtant Chasles met en évidence une des richesses du cours de Monge et un apport, paradoxal, de la géométrie descriptive.

Par rapport à une épure de géométrie descriptive, l'image fournie par le DAO est trop complète, trop finie, trop parfaite, trop riche. L'épure de géométrie descriptive est au DAO ce que le dessin ou le croquis est à la photographie. Et l'apprentissage du dessin reste fondamental pour l'architecte même si l'appareil photographique fait aujourd'hui partie intégrante de sa panoplie. Si un grand journal du soir parisien n'illustre l'actualité que par des caricatures et non par des photographies, c'est bien que, du point de vue de l'information, il faut parfois savoir dire très peu de choses pour en faire comprendre beaucoup. *Mutatis mutandis*, on retrouve avec la géométrie descriptive une situation analogue dans la manipulation des surfaces géométriques.

Découverte des formes et opérations géométriques

Ainsi dépouillé au maximum, le dessin porte non les objets mais les constructions géométriques utilisées dans le raisonnement, constructions qui eussent été noyées et illisibles si les différentes surfaces avaient été représentées. Plus que la représentation de l'espace, l'objectif premier de la géométrie descriptive est la découverte de nouveaux volumes, de "formes inconnues, qui résultent nécessairement des formes primitives données"[10]. Au moment du tracé de l'épure, on "construit", on détermine le volume cherché. La géométrie descriptive permet, en effet, de progresser pas à pas dans cette recherche, à l'aide de quelques principes simples, de deux algorithmes propres, selon Dupin[11], ceux de projection et de rabattement. La force de la géométrie descriptive dans cette activité de recherche, vient de ces moyens algorithmiques et systématiques qui permettent d'avancer de façon sûre et progressive.

Il n'est pas nécessaire de "voir" l'objet dans l'espace avant d'en faire l'épure ; grâce à la géométrie descriptive on peut découvrir une forme que l'on n'arrivait pas à imaginer. La géométrie descriptive permet de représenter sur une feuille de papier des objets tridimensionnels, mais pour la représentation d'objets aux formes simples, elle reste un moyen très abstrait et difficile à saisir, par rapport à d'autres modes de représentation de l'espace et en particulier à l'axonométrie. Pour s'en convaincre il suffit de constater que toutes les notices d'assemblage ou de montage de meubles, jeux ou autres objets livrés en kit, utilisent toujours des représentations axonométriques. La géométrie descriptive ne devient irremplaçable qu'à partir du moment où l'on doit représenter un objet complexe qui ne peut pas être imaginé d'une manière immédiate, comme par exemple l'intersection de deux surfaces quelconques. Sauf à avoir une grande expérience (qu'il faut bien acquérir d'une façon ou d'une autre), on ne connaît pas, *a priori*, la forme d'une sous-face d'escalier "tordu", la nature (spatiale) de l'intersection de deux surfaces, la forme d'un voussoir situé à l'intersection de deux voûtes, les encoches qui permettront l'assemblage de plusieurs pièces de charpente, etc. Le problème est de représenter sur la feuille de papier ces différents objets sans en avoir une "représentation mentale" préalable. C'est naturellement cette étape que la géométrie descriptive permet de franchir, pas à pas, de façon progressive, par un usage judicieux de leur définition géométrique, qui porte la valeur formatrice essentielle de la vision dans l'espace. Et c'est cette étape qui disparaît dans le DAO, qui présente le résultat final mais occulte la démarche intermédiaire.

La géométrie descriptive devient une méthode graphique universelle, applicable à toutes les techniques particulières, parce qu'elle théorise deux phases essentielles : la découverte des formes et la représentation des surfaces. Elle permet ainsi de progresser dans la résolution d'un problème pratique (tracé des ombres, épure de charpenterie ou de coupe des pierres, etc.) par un va-et-vient entre ces deux pôles. En conceptualisant et théorisant les étapes parcourues pour arriver à la découverte des formes, la géométrie descriptive permet de décrire les opérations géométriques qui ont été nécessaires pour la détermination de cet objet. Elle "rend sensibles toutes ses conceptions, toutes ses opérations et les grandeurs graphiques sont pour elle un moyen de peindre dans l'espace, et sa marche et ses résultats"[13].

Une épure de géométrie descriptive, en représentant simultanément l'objet et les constructions géométriques nécessaires à l'obtention du résultat devient ainsi un incomparable outil pédagogique. L'auteur de l'épure peut se relire, revenir sur ses pas, reprendre éventuellement une construction erronée, comme lorsque l'on écrit une démonstration ou lorsque l'on argumente une idée on est amené à relire des para-

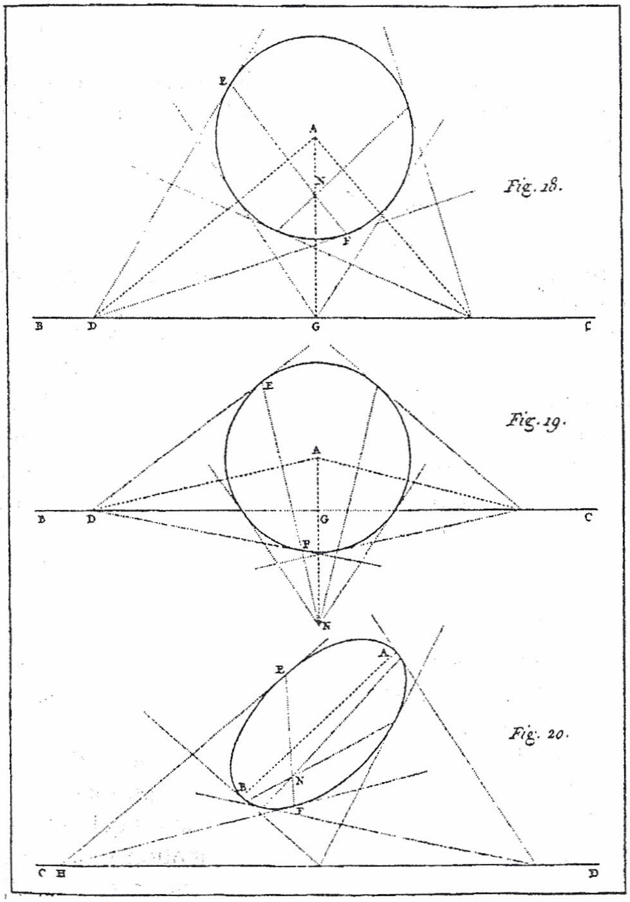


Fig. 2 – Un théorème de Ph. de La Hire

Monge, *Géométrie descriptive*, Planche VII.

La corde joignant les points de contact des tangentes à un cercle, issues d'un point donné, passe par un point fixe lorsque le point se déplace sur une droite donnée. Réciproquement, les tangentes issues des points d'intersection d'une droite D et du cercle se coupent en un point qui se déplacera le long d'une droite si D tourne autour d'un point fixe.

Soit P le plan défini par la droite donnée D et le centre A du cercle. Monge considère la sphère centrée en A et ayant même rayon que le cercle et les cônes de révolution tangents à la sphère dont le sommet se déplace sur la droite D. Les cônes et la sphère admettent un même plan tangent P, contenant la droite D (P est un plan de symétrie de la figure et pour la suite du raisonnement on peut ne retenir que les volumes situés "au-dessus" de P). Le point de contact *N* de P avec la sphère appartient à tous les cercles de contact entre les cônes et la sphère, cercles toujours situés dans des plans perpendiculaires à P. Si l'on projette ces volumes sur P les cercles de contact se projettent sur des cordes du cercle qui passent par N projection de *N*, ce qui permet de déduire le théorème.

graphes antérieurs. En un mot, elle permet d'apprendre et non de répéter des gestes. "Il est nécessaire d'écrire au fur et mesure les découvertes faites [pour pouvoir] revenir avec certitude sur ses pas... la géométrie nouvelle sert en même temps, et à décrire ce que l'esprit voit, et à écrire, et ainsi à fixer de manière invariable ce que l'esprit a vu."[14]

Différence fondamentale avec les techniques graphiques qui la précèdent, mais également avec les outils informatiques actuels pour lesquels les opérations, de l'ordre du calcul matriciel, sont effectuées par les logiciels et ne font plus partie intégrante de l'image et disparaissent derrière la boîte noire qu'est l'ordinateur.

Le passage réciproque espace/plan

La géométrie descriptive n'est pas seulement un outil géométrique pour projeter l'espace sur le plan, comme certains critiques de la géométrie descriptive feignent de le penser, au point d'affirmer, dans une formule provocatrice, que la géométrie descriptive aplatit l'espace, et le cerveau par la même occasion[15]. Or la meilleure définition de la géométrie descriptive me semble être le lieu d'un passage réciproque espace/plan[16]. C'est en ce sens que la géométrie descriptive est la théorie géométrique sous-jacente à la représentation architecturale, quels que soient les outils utilisés par ailleurs pour cette représentation, les allers et retours entre l'espace et le plan étant bien une des caractéristiques du métier d'architecte. C'est également pour cette raison que le dessin d'architecture est une des sources premières de cette théorie géométrique.

Je choisirai d'abord deux exemples tirés des *Leçons de l'École normale* dans lesquels Monge déduit de constructions de géométrie dans l'espace deux théorèmes de géométrie plane. Dans le premier, Monge redémontre un théorème de Ph. de La Hire[17] concernant ce que Poncelet appellera la théorie des pôles et polaires (fig. 2). Le principe de la démonstration de Monge consiste à considérer la figure de géométrie plane comme la projection sur un plan de volumes de l'espace à trois dimensions. Le cercle est vu comme la projection d'une sphère, les deux tangentes au cercle comme les génératrices d'un cône. Cette démonstration, l'un des exemples les plus brillants de l'utilisation de la géométrie à trois dimensions pour un problème de géométrie plane, conduit directement à ce qui sera l'un des points nodaux de l'œuvre de Poncelet.

Utilisant la même méthode, Monge démontre un théorème dû à d'Alembert, concernant l'alignement, trois cercles étant donnés, des points de concours des tangentes communes à ces cercles pris deux à deux (en langage moderne, l'alignement des centres d'homothétie qui échangent ces cercles) (fig. 3). Comme précédemment, il considère les trois cercles donnés comme trois grands cercles de trois sphères et les tangentes communes à deux cercles comme l'intersection du plan des cercles et du cône tangent aux deux sphères associées. Ces démonstrations reviennent à considérer une figure de géométrie plane comme une demi-épure de géométrie descriptive. L'habileté du géomètre consiste alors à choisir astucieusement les volumes, dont seules les projections horizontales sont données, pour conclure.

Dans ces démonstrations, Monge utilise la géométrie descriptive pour réaliser ce que Chasles appellera "l'alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes"[18]. C'est dans le jeu de la

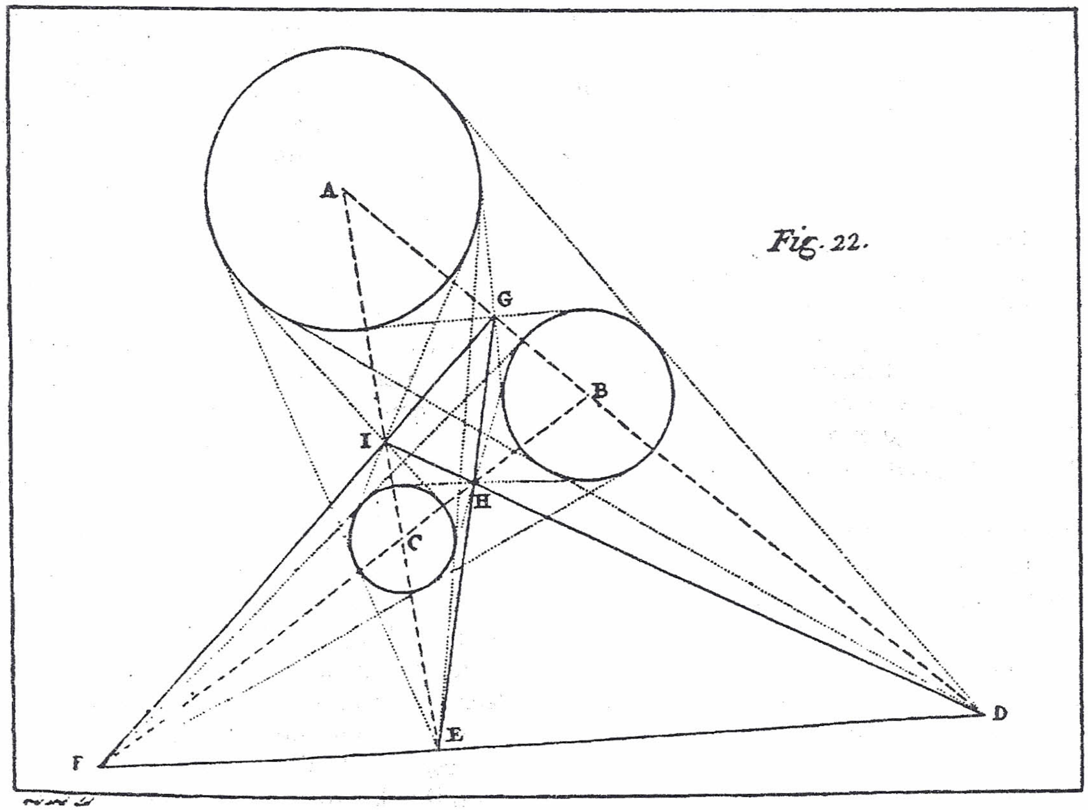


Fig. 3 – Un théorème de d'Alembert

Monge, *Géométrie descriptive*, Planche VIII

Trois cercles quelconques étant donnés, si, en les considérant deux à deux, on leur mène les tangentes extérieures prolongées jusqu'à ce qu'elles se coupent, les trois points d'intersection... seront en ligne droite. [De plus] si aux mêmes cercles, considérés deux à deux, on mène les tangentes intérieures qui se croiseront, les trois nouveaux points d'intersection seront deux à deux en ligne droite avec un des trois premiers.

Monge considère les trois sphères (A), (B) et (C) respectivement centrées en A, B et C dont les trois cercles donnés sont des grands cercles. Un plan tangent extérieurement aux trois sphères sera également tangent aux trois cônes circonscrits aux sphères considérées deux à deux et passera par leurs sommets D, E et F. Ces trois sommets, qui appartiennent également au plan des centres, sont situés sur la droite d'intersection de ces deux plans et sont donc alignés. De même, si l'on considère par exemple le cône de sommet I tangent aux sphères (A) et (C), et le cône de sommet G tangent aux sphères (A) et (B), le plan tangent supérieurement aux sphères (B) et (C) et inférieurement à la sphère (A) contiendra les trois points F, I et G qui pour la même raison que précédemment seront donc alignés.

relation réciproque qu'apparaît pleinement la richesse de la notion de projection et de celle de transformation géométrique. Brianchon, puis Poncelet, cultiveront avec succès cette méthode qui est l'une des caractéristiques de "l'école de Monge". Chasles, systématisant ce principe, remarque que "chaque épure de descriptive peut exprimer un théorème de géométrie plane"[19] et en donne deux exemples dans son *Aperçu des méthodes géométriques*. Le premier généralise le théorème de Desargues sur les triangles homologiques (fig. 4), le second concerne les coniques (fig. 5). Chasles lit véritablement une figure de géométrie plane comme une épure de géométrie descriptive. Par exemple dans le premier théorème, les droites concourantes sont considérées comme les traces d'un plan, et dans le second, les deux ellipses comme l'épure d'un cercle. Il met ainsi clairement en évidence la réciprocité du passage plan-espace, sur lequel il insiste, à juste titre, longuement, et la richesse de la géométrie descriptive comme méthode géométrique, en particulier, pour la recherche des propriétés "descriptives" des figures, invariantes par projection.[20]

Pratiquant à la fois le dessin de projet et le dessin de relevé, en quelque sorte réciproques l'un de l'autre, l'architecte est amené à pratiquer "le thème" et "la version" d'un langage graphique permettant de passer du plan à l'espace. Cette adéquation entre les fonctions du dessin d'architecture et celles assignées à la géométrie descriptive par ses fondateurs est un des éléments permettant de montrer que l'on retrouve bien dans les techniques graphiques utilisées dans le monde du bâtiment l'origine de la théorie mongienne.[21]

Les rapports abstrait/concret ou théorie/pratique

La géométrie descriptive gère d'une manière tout à fait originale, et extrêmement forte, les rapports abstrait/concret ou théorie/pratique. L'abstraction même de cette branche de la géométrie en fait à la fois sa difficulté d'apprentissage et son intérêt comme outil de formation. Mais elle n'est en rien une théorie purement abstraite comme d'autres branches des mathématiques, à la fois par l'épure que l'on dessine en la pratiquant et par les applications qu'elle offre, si l'on s'en tient à la définition étroite qui est couramment la sienne aujourd'hui, ou qu'elle contient, si l'on reprend la définition mongienne qui convient certainement mieux à son enseignement dans les écoles d'architecture.

La place donnée aux applications de la géométrie descriptive dans le curriculum de la première École polytechnique montre à quel point Monge n'entendait pas restreindre la formation des ingénieurs à l'étude de disciplines théoriques. Mais le tracé des épures lui-même, indépendamment des applications, exige une certaine habileté manuelle dans l'art du dessin : "C'est dans des constructions graphiques, c'est dans des dessins que consistera tout le travail ostensible des choses. Ces dessins, ces constructions exigent de la part [des élèves] des méditations ; mais il n'y aura aucun temps purement consacré à ces méditations ; elles auront lieu pendant toute la durée des constructions et l'élève qui aura en même temps exercé son intelligence et l'adresse de ses mains, aura pour prix de ce double travail la description exacte de la connaissance qu'il aura acquise."[22]

Bien sûr cette activité manuelle disparaît avec le DAO, et risque de disparaître égale-

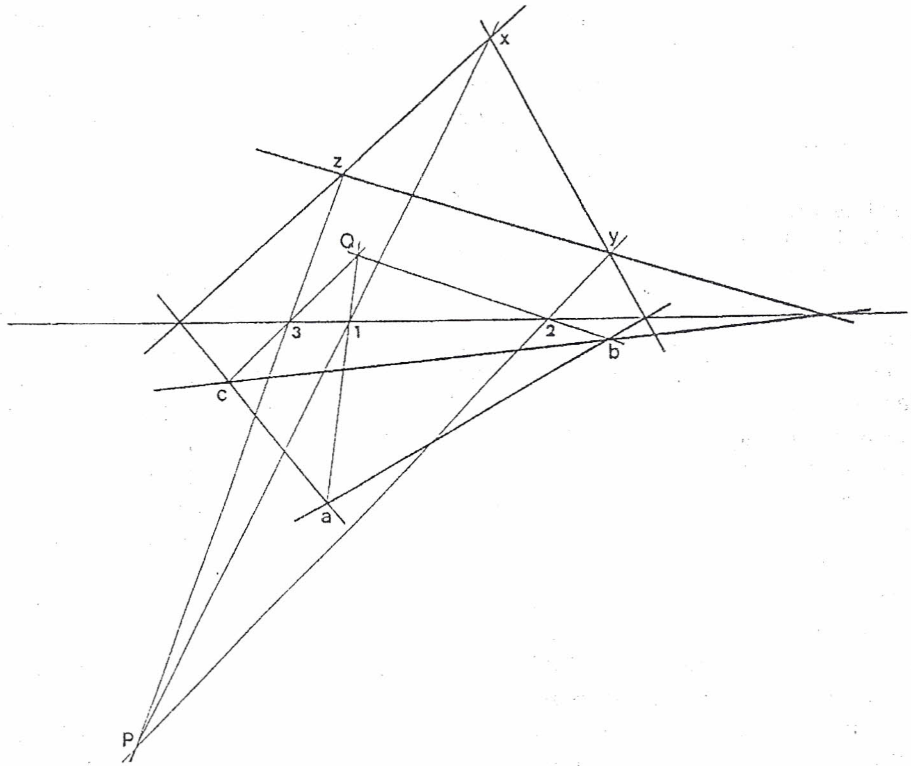


Fig. 4 – Illustration du premier théorème de Chasles

Si l'on a dans un plan deux triangles dont les côtés concourent deux à deux en trois points situés sur une même droite L, et que par un point, pris arbitrairement, on mène trois droites aux sommets du premier triangle ; qu'on les prolonge jusqu'à ce qu'elles rencontrent en trois points la droite L ; qu'on joigne ces trois points, respectivement, aux trois sommets du second triangle, par trois droites ; ces droites iront concourir en un même point.

Le principe de la démonstration consiste à considérer les deux côtés des deux triangles, qui viennent se couper sur la droite *L*, comme les traces d'un plan (par exemple, *ab* et *xy* sont les traces horizontale et frontale d'un plan, la droite *L* est la ligne de terre de l'épure). Les trois plans (*ab, xy*), (*bc, yz*) et (*ca, zx*) ont en commun un point *S* (qui n'est pas représenté sur l'épure). Si d'un point *P* quelconque du plan des triangles, on mène les droites *Px, Py, Pz,* qui viennent couper la ligne de terre *L* en *1, 2* et *3,* on peut considérer ce point *P* comme un point du plan de projection frontal et les trois droites considérées comme les traces frontales des plans contenant la droite *PS* et, respectivement, les points *x, y* et *z*. Il en résulte que les droites *a1, b2* et *c3* sont les traces horizontales de ces mêmes plans et par conséquent passent par le point *Q*, intersection de la droite *PS* avec le plan horizontal, ce qui donne le théorème énoncé. Si l'on prend pour point *P*, le point d'intersection de deux droites joignant un sommet du premier triangle à un sommet du second (par exemple l'intersection de *ax* avec *by*), on retrouve le théorème de Desargues sur les triangles homologiques.

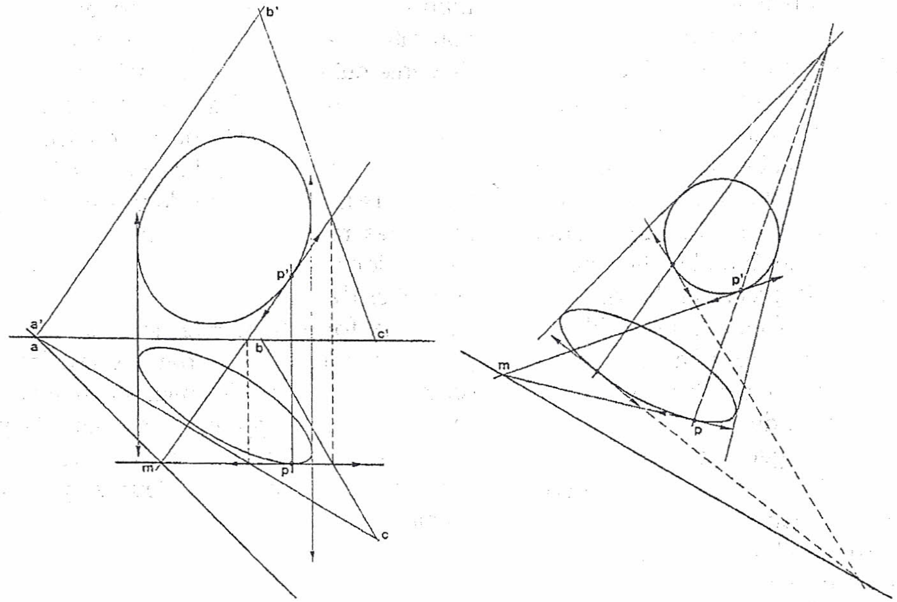


Fig. 5 – Illustration du second théorème de Chasles

Si par le point de concours des deux tangentes communes à deux coniques quelconques situées dans un plan, on tire arbitrairement une transversale qui rencontre chacune de ces courbes en deux points, et si on leur mène leurs tangentes en ces points ; les tangentes à la première rencontreront les tangentes à la seconde en quatre points qui seront, deux à deux, sur deux droites fixes, quelle que soit la transversale menée par le point de concours des deux tangentes communes aux deux coniques.

Si l'on considère l'épure d'un cercle I pris dans un plan quelconque ABC, P un point de ce cercle et T sa tangente en P, on obtient deux ellipses G et G', t et t' leurs tangentes respectives en deux points p et p' situés sur une même ligne de rappel. Ces deux tangentes t et t' se coupent en un point m qui appartient à l'intersection du plan du cercle avec le second plan bissecteur. En effet le second plan bissecteur est l'ensemble des points de l'espace dont la projection frontale se confond avec la projection horizontale. Il en résulte que les projections horizontales et frontales des droites d'un plan se coupent sur une même droite, qui est l'épure de l'intersection du plan considéré avec le second plan bissecteur. Lorsque P décrit le cercle I, le point m se déplace sur cette droite fixe. De plus il existe dans l'espace une ellipse E située dans un autre plan que le cercle I et qui admet même projection horizontale et même projection frontale que lui, car le cercle est l'une des courbes de pénétration de son cylindre de projection horizontale et de son cylindre de projection frontale. Or lorsque deux cylindres se coupent, si la courbe "d'entrée" est plane, celle "de sortie" l'est également. Comme précédemment, si un point Q décrit cette ellipse E, les tangentes respectivement à G et G' en q et q' se coupent sur la droite d'intersection du plan de E et du second plan bissecteur. Ainsi une droite verticale coupe les deux ellipses G et G' en quatre points que l'on peut appeler p, q, p' et q'. Les tangentes issues de p et de q coupent celles issues de p' et q' en quatre points qui, deux à deux, appartiennent à deux droites fixes, quelle que soit la verticale considérée. En prenant la perspective de cette épure, on en déduit le théorème.

ment un certain entraînement "à penser avec ses dix doigts", pour reprendre une formule de Leroi-Gourhan.[23] Partie intégrante des mathématiques, la géométrie descriptive ne se réduit donc pas pour autant à l'expression de raisonnements abstraits, et exige, de manière intrinsèque, la production d'un document graphique à la qualité duquel concourent, de façon inséparable, la justesse du raisonnement et la précision du trait. Au plaisir de trouver la solution d'un problème de géométrie s'ajoute, pour l'auteur d'une épure, le plaisir de la production d'une image, parfois inattendue, possédant une esthétique propre. La géométrie descriptive réalise ainsi "une alliance intime" entre géométrie spéculative et activité manuelle. Cette situation est, dans le champ des mathématiques, unique et ne se retrouve, dans les sciences exactes, qu'au moment de la réalisation d'expériences en physique ou en chimie.[24] C'est la raison pour laquelle la géométrie descriptive me semble devoir garder une place de choix parmi les enseignements scientifiques proposés au futur architecte.

La géométrie descriptive apparaît ainsi comme une discipline emblématique de l'articulation entre savoir théorique et savoir pratique. À travers les applications qu'elle permet, elle reste un lieu d'articulation, de rencontre, de confrontation, de la géométrie avec un matériau, qui peut être la pierre, le bois, le béton, le métal ou le textile, et cette rencontre est elle aussi est une des caractéristiques du métier d'architecte.

Que la géométrie descriptive ne soit plus, pour le mathématicien, la branche des mathématiques la plus prometteuse en matière de nouveaux résultats, cela ne fait aucun doute. Qu'après un siècle et demi de pratique, elle ait été jugée inutile dans la formation des ingénieurs, on ne peut que le constater. La "langue nécessaire à l'homme de génie qui conçoit un projet" est-elle devenue pour autant le "latin de l'espace", une langue morte dont l'étude ne présente plus qu'un aspect culturel ? Pas nécessairement. Parce qu'elle est au cœur du passage espace-plan, des rapports dessin-mathématiques, des tensions géométrie-matière, elle au cœur du métier d'architecte et reste une discipline clé de sa formation. Elle demeure un outil précieux pour développer les facultés de l'étudiant-architecte à imaginer et inventer l'espace, et son apprentissage reste le plus sûr moyen que les architectes de demain ne perdent pas la maîtrise de leur langage spécifique.

Notes

(1) Monge accorde, dans le curriculum de la première École polytechnique, la moitié du temps des études à cette discipline ; mais il a de la géométrie descriptive une définition très large et inclut sous ce titre les applications de la théorie géométrique à la coupe des pierres et des bois, au tracé des ombres, à la perspective, etc.

(2) Lettre inédite de Monge à son gendre, Nicolas Joseph Marey, du 27 pluviôse an V (15 février 1797). La correspondance de Monge sera prochainement publiée par Patrice Bret, Jean Dhombres et René Taton.

(3) C'est Hachette, qui succédera à Monge dès 1796 pour l'enseignement de la géométrie descriptive à l'École polytechnique, qui se chargera de l'édition du cours fondateur.

(4) Dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie...*, Bruxelles, 1837, p. 189-196.

(5) Dans son " Discours d'inauguration du cours de Géométrie supérieure de la Faculté des Sciences de Paris, prononcé le 22 décembre 1846 ", in *Traité de géométrie supérieure*, 1852, p. 547-585. Il y déclare en particulier : "Il ne faut pas perdre de vue que... la Géométrie descriptive n'est toujours qu'un instrument dont l'ingénieur se sert pour traduire sa pensée et exé-

cuter sur le papier les opérations que la science, je veux dire la Géométrie générale, lui indique. La Géométrie descriptive exécute, mais elle ne crée pas..."

(6) La Gournerie (1814-1883) enseigna la géométrie descriptive à l'École polytechnique (de 1848 à 1865) et au Conservatoire national des arts et métiers (de 1854 à sa mort). Carlo Bourlet (1866-1913) fut le dernier titulaire de chaire de géométrie descriptive du Conservatoire national des arts et métiers.

(7) Un point de l'espace est représenté en géométrie descriptive par un couple de points, ses projections respectives sur deux plans orthogonaux pris comme plans de référence. Pour représenter une surface, il faut donner la manière de construire les projections horizontales et frontales de deux génératrices qui passent par un point de cette surface.

(8) Là encore il s'agit bien d'un choix de la part de Monge. Une autre solution, extension d'une de celles proposées pour la sphère, consiste à rendre la droite (BC, bc) de bout – ou verticale – et à déterminer le contour apparent de la surface de révolution comme enveloppe d'une famille d'ellipses. J'ai donné d'autres exemples, comme la détermination de la distance de deux droites, dans *Epures d'architecture, de la coupe des pierres à la géométrie descriptive, XVIe-XIXe siècles*, Bâle, Birkhäuser, 1998, chap. III.

(9) Chasles, *Aperçu historique sur l'origine..., op. cit.*, p. 208.

(10) Hachette, J.N.P., *Traité de géométrie descriptive*, 1822, p. xj.

(11) Dupin, C., *Développements de géométrie pour faire suite à la " Géométrie descriptive " et à la " Géométrie analytique " de Monge*, 1813.

(12) Du moins n'est-il pas nécessaire de le voir complètement, totalement, mais il faut avoir une idée des problèmes géométriques en cause pour pouvoir appliquer le bon "algorithme".

(13) Dupin, C., *ibid.*, p. 237.

(14) Olivier, Th., *Traité de géométrie descriptive théorique et appliqué*, 1843, p. VIII.

(15) Je restitue ici des propos tenus par Georges Emmerich lors d'une réunion du groupe "Espace et géométrie" organisée à l'École d'architecture Paris-Villemin.

(16) J'ai longuement exposé ce point, dans l'analyse des leçons de Monge, comme dans celle des cours de ses successeurs (tout particulièrement ceux de Chasles) ; cf. *Epures d'architecture..., op. cit.*, chap. III et IV.

(17) Ce théorème est démontré par La Hire dans son *Traité des sections coniques* (1685, prop. 26 à 28 du livre 1 et 23 à 27 du livre 2) ; Monge généralise ensuite ce théorème en considérant une conique quelconque (cf. fig. 2, sous-figure 20).

(18) Chasles, *Aperçu historique sur l'origine..., op. cit.*, p. 191.

(19) *Ibid.*, p. 194.

(20) Poncelet distingue entre les propriétés métriques des figures (qui font intervenir les distances et les angles) et les propriétés descriptives définies par les formes des figures et leurs positions relatives. Ces dernières sont invariantes par projection ; les relations métriques ne le sont généralement pas. Le birapport, ou rapport anharmonique, est un des exemples de relations métriques invariantes par projection conique. L'étude des propriétés invariantes par projection est un des buts de l'œuvre de Poncelet. Voir, par exemple, Dhombres et alii, *Mathématiques au fil des âges*, Paris, Gauthier-Villars, 1987. p. 264-274, ou Bkouche, R., " Appendice historique ", *in* D. Lehmann et R. Bkouche, *Initiation à la géométrie*, Paris, P.U.F., 1988, p. 435-490.

(21) J'ai tenté d'analyser, dans *Epures d'architecture..., op. cit.*, les rapports entre la géométrie descriptive, le dessin d'architecture et le trait des appareilleurs.

(22) Monge, "Procès verbaux des séances du conseil d'administration de l'École centrale des travaux publics", 20 pluviôse an III, Archives de l'École polytechnique.

(23) Leroi-Gourhan, A., *Le Geste et la Parole*, Paris, Albin Michel, 1964, p. 62.

(24) Ce n'est d'ailleurs pas un hasard si Monge souhaitait également accorder à ces deux sciences expérimentales une part importante du curriculum des élèves de l'École polytechnique ; et seuls des problèmes d'ordre budgétaire vinrent contrecarrer ses projets.